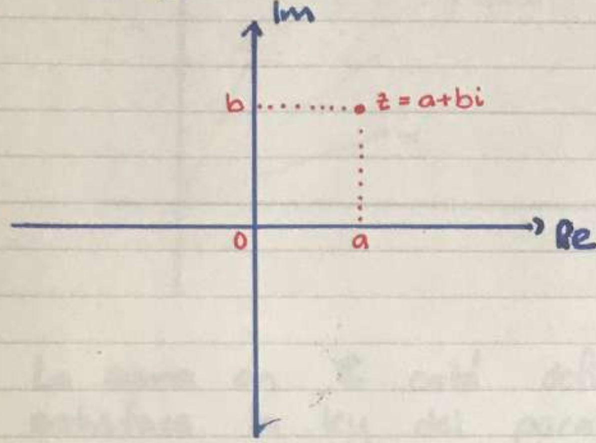
27 04 20

Algebra Superior 2

Recordemos cómo representar geométricamente un complejo de la forma $z = a+bi$ y luego pensemos en lo que ocurre geométricamente cuando sumamos 2 complejos.



$a, b \in \mathbb{R}$

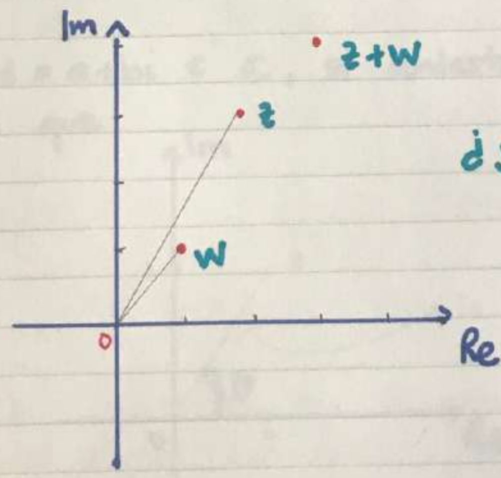
Si $w = c+di$, entonces sabemos que $z+w = (a+c) + (b+d)i$.

Veamos un ejemplo:

$z = 2+3i$

$w = 1+i$

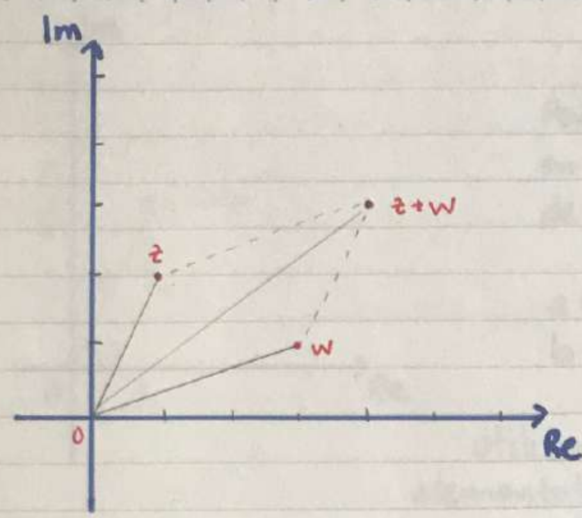
entonces $z+w = 3+4i$



¿Se les ocurre qué está ocurriendo geométricamente con la suma?

Ej. Grafiquen los siguientes ejemplos para tratar de contestar la pregunta:

1. $(2-3i) + (4+2i)$
2. $(4+5i) + (2+2i)$



$z = 1+2i$

$w = 3+i$

$z+w = 4+3i$

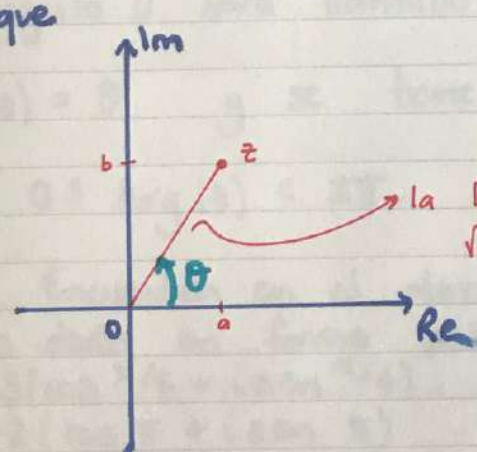
Pregunta, geométricamente, ¿cuánto vale $|z|$, $|w|$, $|z+w|$? O más precisamente, ¿cómo se pueden representar estos valores geométricamente?

La suma en $\mathbb{C}$ está definida de tal manera que satisface la ley del paralelogramo.

Para tratar de ver qué pasa con la multiplicación primero introduciremos otra forma de representar a los números complejos.

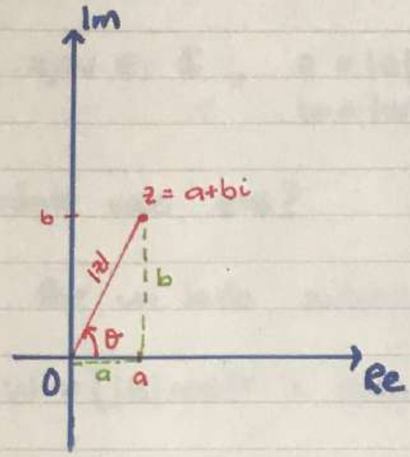
Representación Polar de los Complejos

Sea $z = a+bi \in \mathbb{C}$, si contestaron la pregunta en rojo saben que



la longitud de esta línea es $\sqrt{a^2+b^2}$ y $\therefore$ es $|z|$.

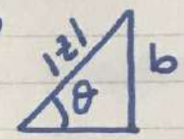
Llamemos θ al ángulo entre el eje real (en su parte positiva) y la línea que va del origen al punto z (la que tiene longitud igual a $|z|$). Mediremos el ángulo en el sentido contrario a las manecillas del reloj.



Podemos expesar a a y b en términos de $|z|$ y θ de la siguiente manera:

$$a = |z|\cos\theta$$
$$b = |z|\operatorname{sen}\theta$$

utilizando identidades trigonométricas elementales en el triángulo rectangulo



$\tan\theta = b/a$

$\theta = \arctan\frac{b}{a}$

Ahora $z = a + bi$
$= |z|\cos\theta + i|z|\operatorname{sen}\theta.$

Podemos escribir $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ y ésta es llamada la representación polar de z.

El ángulo θ será llamado el argumento de z:

$\operatorname{Arg}(z) = \theta$ y se tiene siempre que

$$0 \leq \operatorname{Arg}(z) < 2\pi.$$

Ejercicio. Encuenten en el plano complejo los siguentes números dados en forma polar:

1. $3(\cos \pi/4 + i\operatorname{sen} \pi/4)$
2. $-2(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$
3. $2(\cos \pi/2 + i\operatorname{sen}\pi/2)$
4. $7(\cos\pi/3 + i\operatorname{sen}\pi/3)$
5. $-1(\cos 2\pi/3 + i\operatorname{sen} 2\pi/3)$
6. $4(\cos 3\pi/2 + i\operatorname{sen} 3\pi/2)$.

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$
$w = |w|(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$

¿Cuánto vale zw?

Por un lado sabemos que

$$zw = (|z|\cos\theta + |z| i\,\text{sen}\,\theta)(|w|\cos\varphi + |w| i\,\text{sen}\,\varphi)$$

$$= (|z||w|\cos\theta\cos\varphi - |z||w|\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi)$$

$$+ i(|z||w|\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi + |z||w|\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi)$$

Pero recordando que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

y $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

tenemos que

$$zw = |z||w|\cos(\theta+\varphi) + |z||w| i\,\text{sen}(\theta+\varphi)$$

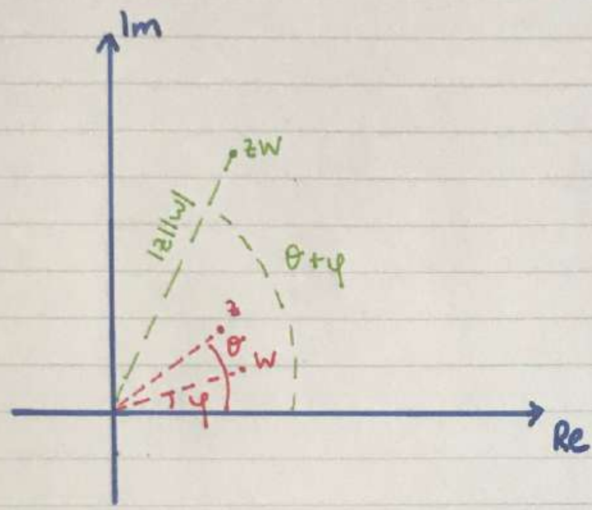
$$= |z||w|(\cos(\theta+\varphi) + i\,\text{sen}(\theta+\varphi))$$

es decir, se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

Entonces tenemos ya demostrado la siguiente

Prop. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces $\text{Arg}(zw) = \text{Arg}\,z + \text{Arg}\,w$.

A partir de lo anterior tenemos ya una interpretación geométrica de la multiplicación de dos números complejos:



Ej. Encuentre el argumento de los siguientes números:

1. 6
2. $-i$
3. $-1+i$
4. $2+3i$
5. $3-4i$

Encuentre la forma polar de los siguientes números:

1. $3+3i$
2. $3-3i$
3. $-3+3i$
4. $5i$
5. $4\sqrt{3}+4i$
6. $-4\sqrt{3}-4i$