DATE 29 . 04 . 20

Algebra Superior 2

Sabemos ya que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $zw = |z||w|(\cos(\theta+\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi))$ donde $\theta = \mathrm{Arg}\, z$ y $\varphi = \mathrm{Arg}\, w$.
En particular si $z = w$ tenemos que

$$z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\, 2\theta)$$

y podemos ver facilmente que $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta)$:

Teo. Sean $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta)$.

Dem. Haremos la demostración por inducción sobre n. Dadas las observaciones previas al enunciado del teorema el caso base ya está demostrado.

Ahora, basta ver que si suponemos que

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta)$$

entonces se cumple que $z^{n+1} = |z|^{n+1}(\cos(n+1)\theta + i\,\mathrm{sen}(n+1)\theta)$.

$$\begin{aligned}
z^{n+1} = z^n \cdot z &= (|z|^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta)) \cdot (|z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)) \\
&= |z|^n|z|(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta)(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \\
&= |z|^{n+1}(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta)(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \\
&= |z|^{n+1}((\cos n\theta\cos\theta - \mathrm{sen}\, n\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + i(\cos n\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \\
&\qquad + \mathrm{sen}\, n\theta\cos\theta)) \\
&= |z|^{n+1}(\cos(n\theta+\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta+\theta)) \\
&= |z|^{n+1}(\cos(n+1)\theta + i\,\mathrm{sen}(n+1)\theta)) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Obs. Si $|z| = 1$ en el teorema anterior, tenemos que

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Esta identidad se conoce como el Teorema de De Moivre.

Un resultado muy vinculado con el teorema de De Moivre es la fórmula de Euler:

Sea $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \in \mathbb{C}$.

La fórmula de Euler establece que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$.
Se tendría que $z = re^{i\theta}$.
Es decir, establece una relación fundamental entre la función exponencial y las funciones trigonométricas.
Si tomamos $\theta = \pi$ en la fórmula obtenemos la identidad de Euler:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1 + i0$$
$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Teo. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$.

Dem. p.d. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}$

o lo que es lo mismo p.d. $\dfrac{\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}{e^{i\theta}} = 1 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Haremos uso del cálculo para esta demostración:

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}{e^{i\theta}} = \frac{d}{d\theta} e^{-i\theta}(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= e^{-i\theta}(-\text{sen}\,\theta + i\cos\theta) + (-ie^{-i\theta})(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$
$$= e^{-i\theta}(-\text{sen}\,\theta + i\cos\theta - i\cos\theta - i^2\,\text{sen}\,\theta)$$
$$= e^{-i\theta}(-\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,\theta) = 0$$

Por tanto, $\dfrac{\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}{e^{i\theta}}$ es constante como función de θ.

En $\theta = 0$ tenemos que $\dfrac{\cos 0 + i\,\text{sen}\,0}{e^0} = 1$, es decir

la función es constante e igual a 1:

$$\frac{\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}{e^{i\theta}} = 1 \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R} \ \blacksquare$$