Algebra Superior 2

Ejemplos Aplicaciones del teorema de De Moivre:

- Utilice el teorema para expresar a $\cos 2\theta$ y $\mathrm{sen} 2\theta$ en términos de $\mathrm{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$:

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = e^{i2\theta} = \cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$\begin{aligned} &\cos^2\theta + 2i\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + i^2\,\mathrm{sen}^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta + 2i\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \end{aligned}$$

Por tanto $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta$
y $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta.$

- Utilice el teorema para expresar a $\cos 4\theta$ y $\mathrm{sen}\,4\theta$ en términos de $\mathrm{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$:

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^4 = e^{i4\theta} = \cos 4\theta + i\,\mathrm{sen}\,4\theta$$

$$\begin{aligned} &\cos^4\theta + 4\cos^3\theta\,(i\,\mathrm{sen}\,\theta) + 6\cos^2\theta\,(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 \\ &\quad + 4\cos\theta\,(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 + (i\,\mathrm{sen}\,\theta)^4 \\ &= (\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^4\theta) + \\ &\quad i\,(4\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\theta) \end{aligned}$$

Por tanto $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^4\theta$
y $\mathrm{sen}\,4\theta = 4\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\theta$.

Teorema. Sea $w \in \mathbb{C}$ distinto de cero y sea $n \in \mathbb{N}$. Existen n números complejos que satisfacen la ecuación $z^n = w$. O, lo que es lo mismo, w tiene n raíces n-ésimas.

Dem. Veremos que las raíces n-ésimas de w están dadas por

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

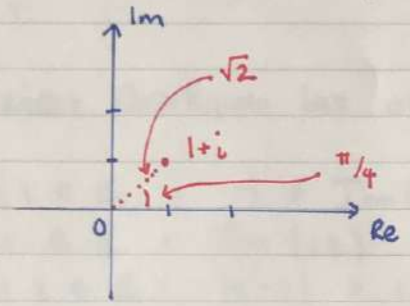
donde $w = |w|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ y $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Veamos un ejemplo:

Calcular las raíces cúbicas de $1+i$:

· Primero expresaremos a $1+i$ en forma polar

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$



· De acuerdo con lo dicho en la página anterior $1+i$ tiene 3 raíces cúbicas:

$$z_{1,2,3} = 2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)$$

$k = 0,1,2$

$$z_1 = 2^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = 2^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_3 = 2^{1/6}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{17\pi}{12}\right)$$

Ej. Grafiquen z_1, z_2 y z_3 en el plano complejo y verifiquen que $z_1^3 = 1+i$

$z_2^3 = 1+i$

y $z_3^3 = 1+i$.

Es muy útil poder graficar regiones en el plano complejo, por ejemplo; $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ es el semiplano superior.

$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ es un disco con centro en 0 y radio 1.

Ejercicio: Grafiquen las siguientes regiones:

1. $\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(iz) = 1\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$
4. $\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 4\}$
5. $\{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 2z + 1| > 0\}$
6. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \pm 1 \text{ o } \operatorname{Im}(z) = \pm 1\}$
7. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 2\operatorname{Re}(z)\}$

Con esto terminamos el tema de números complejos.