Algebra Superior 2

06·05·20

Polinomios y Ecuaciones Polinomiales

Los polinomios que estudiaremos tendrán coeficientes reales en esta sección del curso, pero en realidad bastaría con que estuvieran en un dominio entero.

Def. Un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$ es una expresión de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ en donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Tambien es posible utilizar la notación $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Dos polinomios son iguales si tienen los mismos términos despreciando aquellos con coeficientes iguales a 0. Por ejemplo: $5x^2 + 3x + 4$ es el mismo polinomio que $0x^4 + 5x^2 + 3x + 4$.

Def. Sean $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x^1 + b_0$ dos polinomios. Definimos la suma $p(x) + q(x)$ de la siguiente manera:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $n > m$:

$$p(x) + q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m + b_m)x^m + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x^1 + (a_0 + b_0).$$

Def. Sean $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x^1 + b_0$ dos polinomios. Definimos el producto $p(x)q(x)$ de la siguiente manera:

$$p(x)q(x) = (a_0 b_0)x^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x^1 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + (a_n b_m)x^{n+m}$$

en donde el coeficiente de x^i está dado por

$$\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}.$$

Prop. El conjunto $\mathbb{R}[x]$ de todas las polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y con las operaciones recién definidas es un dominio entero.

Ejercicio Probar la proposición anterior.
Háganlo paso a paso, primero vean que cada operación satisface lo necesario y piensen quién es el neutro aditivo y quiénes juegan el papel de inversos aditivos. Utilicen el hecho de que $\mathbb{R}$ es un campo.