Algebra Superior 2

08·05·20

Def. Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$. Supongamos que $p(x)$ no es el polinomio cero. El grado de $p(x)$, $Grad(p(x))$, es la m más grande tal que $a_m \neq 0$. En este caso el coeficiente a_m es llamado el coeficiente principal.

Ejemplos.
1. $Grad(x^2+3) = 2$
2. $Grad(5x^4 + 3x^2 + 1) = 4$
3. $Grad(2x) = 1$
4. $Grad(11) = 0$

Nota. El polinomio cero no tendrá grado asignado.

Prop Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ distintos del polinomio cero. Entonces:

1. $Grad(p(x) \cdot q(x)) = Grad(p(x)) + Grad(q(x))$.
2. Si $p(x) + q(x) \neq 0$ entonces $Grad(p(x) + q(x)) \leq \max\{Grad(p(x)), Grad(q(x))\}$.

Dem. Sean $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y

$q(x) = b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, con $a_n \neq 0 \neq b_m$.

Entonces $Grad(p(x)) = n$ y $Grad(q(x)) = m$.

1. Ahora $p(x) \cdot q(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_m b_m + a_n b_{m-1}) x^{n+m-1} + \cdots + a_0 b_0$.

Como $\mathbb{R}$ es un campo $a_n b_m \neq 0$ y $\therefore$

$$Grad(p(x) \cdot q(x)) = n + m.$$

2. Sin pérdida de generalidad supongamos que $n > m$:

$$p(x) + q(x) = a_n x^n + \cdots + (a_m + b_m) x^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) x^{m-1} + \cdots + a_0 + b_0$$

$\therefore$ $Grad(p(x) + q(x)) = n$ ■

Def. Sean $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Decimos que $f(x)$ divide a $g(x)$, y escribimos $f(x) \mid g(x)$, si existe un polinomio $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $f(x)h(x) = g(x)$.

Obs. Antes de seguir con la teoría es importante que sepamos como 'dividir' polinomios:

1. Para dividir $x^3 + 2x + 3$ entre $2x^2 - 3x + 1$ hacemos lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
 & \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4} \quad \leftarrow \text{cociente} \\
\hline
2x^2 - 3x + 1 & x^3 + 0x^2 + 2x + 3 \\
 & -\; x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x \\
\cline{2-2}
 & \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x \\
 & -\; \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{4}x + \tfrac{3}{4} \\
\cline{2-2}
 & \tfrac{15}{4}x \;\; \tfrac{-9}{4} \quad \leftarrow \text{residuo}
\end{array}$$

2. Para dividir $2x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ entre $x+2$:

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + x + 4 \quad \leftarrow \text{cociente} \\
\hline
x+2 & 2x^3 + 5x^2 + 6x + 8 \\
 & -\; 2x^3 + 4x^2 \\
\cline{2-2}
 & x^2 + 6x \\
 & -\; x^2 + 2x \\
\cline{2-2}
 & 4x + 8 \\
 & -\; 4x + 8 \\
\cline{2-2}
 & 0 \quad \text{sin residuo}
\end{array}$$

Ejercicio: Calcule

1. $3x^3 - 2x^2 + 5$ entre $x^2 - 1$
2. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x^2 + x - 6$
3. $4x^3 - 2x^2 - 3$ entre $2x^2 - 1$
4. $x^4 - 2x^2 + 8x - 12$ entre $x - 6$

Teo. Algoritmo de la división para polinomios.

Sean $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $g(x)$ no es el polinomio 0. Entonces existen polinomios únicos $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ en donde $r(x) = 0$ o $\text{Grad}(r(x)) < \text{Grad}(g(x))$.

Comparen este teorema con el algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$.

Dem. Si $g(x) \mid f(x)$ entonces el resultado se sigue.

Si $g(x)$ no divide a $f(x)$ entonces sea

$$\mathcal{A} = \{ f(x) - g(x)s(x) \ : \ s(x) \in \mathbb{R}[x] \}.$$

Notamos que $0 \notin \mathcal{A}$ ya que $g(x) \nmid f(x)$.
Veamos que existe $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ con las propiedades deseadas:

Sea $\mathcal{a} = \{ n \in \mathbb{N} : n = \text{Grad}(h(x)) \text{ con } h(x) \in \mathcal{A} \}$.
Es claro que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ya que $f(x) \in \mathcal{A}$, y por tanto, $\mathcal{a} \neq \emptyset$.

Ahora, $\mathcal{a}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$ y es no vacío, por tanto tiene un primer elemento, llamémoslo n.

Sean $r(x) \in \mathcal{A}$ y $q(x)$ tal que $r(x) = f(x) - g(x)q(x)$ y $\text{Grad}(r(x)) = n$.

Entonces $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

Si $\text{Grad}(r(x)) \geq \text{Grad}(g(x))$ sean a_n y b_m los coeficientes principales de $r(x)$ y $g(x)$ respectivamente.

Si $r_1(x) = r(x) - a_n \frac{1}{b_m} g(x) x^{n-m} \in \mathbb{R}[x]$, entonces

$$f(x) = g(x)\left(q(x) + a_n \frac{1}{b_m} x^{n-m}\right) + r_1(x)$$

y por tanto $r_1(x) \in \mathcal{A}$.

Como $0 \notin \mathcal{A}$ entonces $\operatorname{Grad}(r_1(x)) < \operatorname{Grad}(r(x))$
pero esto es una contradicción!

Por tanto, $\operatorname{Grad}(r(x)) < \operatorname{Grad}(g(x))$.

Falta ver ahora que $q(x)$ y $r(x)$ son únicos:

Supongamos que existen $q_0(x)$ y $r_0(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tales que
$f(x) = g(x) q_0(x) + r_0(x)$ con $r_0(x) = 0$ o
$\operatorname{Grad}(r_0(x)) < \operatorname{Grad}(g(x))$.

Entonces $g(x)(q(x) - q_0(x)) = r_0(x) - r(x)$

y $\operatorname{Grad}(r_0(x) - r(x)) \leq \max\{\operatorname{Grad}(r_0(x)), \operatorname{Grad}(r(x))\}$

$< \operatorname{Grad}(g(x))$.

Por otro lado $\operatorname{Grad}(r_0(x) - r(x)) = \operatorname{Grad}(g(x))$
$+ \operatorname{Grad}(q(x) - q_0(x))$
$\geq \operatorname{Grad}(g(x))$.

Pero esto último es una contradicción!

Por tanto $r(x) = r_0(x)$ y como $\mathbb{R}[x]$ es un
dominio entero y $g(x) \neq 0$, $q(x) = q_0(x)$
que es lo que se quería mostrar.