Algebra Superior 2 18·05·20

Raíces de un polinomio

Def. Sean $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Decimos que α es raíz de $p(x)$ si $p(\alpha) = 0$.

Ejemplo. 1. $p(x) = 2x - 3$
$\alpha = 3/2$ es raíz de $p(x)$.

2. $p(x) = x^2 + 1$ no tiene raíces en $\mathbb{R}$ porque no existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha^2 = -1$.

3. $p(x) = x^2 - 7x + 12$ tiene raíces 3 y 4.

Teo. del Residuo.
Sean $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $p(x) = q(x)(x-\alpha) + p(\alpha)$

para algún polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Dem. Dados los polinomios $p(x)$ y $x-\alpha$, por el algoritmo de la división existen $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$p(x) = q(x)(x-\alpha) + r(x)$$

y sabemos además que $r(x) = 0$ o $\text{Grad}(r(x)) < \text{Grad}(x-\alpha) = 1$

En otras palabras, $r(x) \in \mathbb{R}$.

Si evaluamos $p(x)$ en α tenemos que
$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$

y por tanto, como $r(x)$ es constante,
$$p(x) = q(x)(x-\alpha) + p(\alpha) \blacksquare$$

Def. Sean $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $b(x) \mid a(x)$, se dice en este caso que $b(x)$ es factor de $(a(x))$.

Teo. del factor

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. $c \in \mathbb{R}$ es raíz de $p(x)$ si y solo si $x-c$ es factor de $p(x)$.

Dem. Supongamos que c es raíz de $p(x)$ p.d. $x-c$ es factor de $p(x)$.

Como c es raíz, entonces $p(c)=0$.
Por el teorema del residuo sabemos que $p(x)$ se puede escribir como

$$p(x) = q(x)(x-c) + r$$

pero $r = p(c)$ y es 0 en este caso, portanto,
$p(x) = q(x)(x-c)$ y $(x-c) \mid p(x)$.

Conversamente, supongamos que $x-c$ es factor de $p(x)$ y p.d. $p(c)=0$.

Como $x-c$ es factor, tenemos que $p(x) = q(x)(x-c)$
y al evaluar en c tenemos que

$$p(c) = q(c)(c-c) = 0.$$

$\therefore$ c es raíz $\blacksquare$

Ejemplo.

$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad \in \mathbb{R}[x]$

$p(-1) = 0 \qquad \therefore \quad -1$ es raíz

Entonces $x+1$ es factor:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 1 \\ \hline x+1 & x^3 + x^2 + x + 1 \\ & x^3 + x^2 \\ \hline & \quad 0 + x \end{array}$$

$p(x) = (x+1)(x^2+1)$.

A partir de lo anterior vemos que $p(x)$ es un polinomio reducible en $\mathbb{R}[x]$.

Teo. Fundamental del Algebra.

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $Grad(p(x)) = n$. Entonces $p(x)$ tiene a lo más n raíces en $\mathbb{R}$.

La demostración de este teorema requiere de técnicas de variable compleja y por tanto la verán al llevar ese curso.