Algebra Superior 2 20·05·20

Teo. Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ con coeficientes enteros y tal que $a_0 \neq 0$ y $a_n \neq 0$. Si $(b, c) = 1$ y $\frac{b}{c}$ es raíz de $p(x)$, entonces

b divide a a_0 y c divide a a_n.

Veamos primero un ejemplo que muestra el interés de este resultado y posteriormente su demostración.

Ej. Sea $p(x) = 6x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 6x - 4$

Supongamos que $\frac{m}{n}$ es raíz de $p(x)$.
Se tendría entonces que m divide a -4 y n divide a 6.
Las posibilidades entonces son:

$$m = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$
$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$$

y $\therefore$ los posibles valores para $\frac{m}{n}$ son:
$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm 4/3, \pm 1/6.$

O dicho en otras palabras, si $p(x)$ tiene raices racionales, tienen que ser algunas de las que están en la lista.

Pueden verificar que $p(-\frac{1}{2}) = 0$ y $p(\frac{1}{3}) = 0$.
Por tanto
$$p(x) = (x + \tfrac{1}{2})(x - \tfrac{2}{3})\, q(x)$$

con $q(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Dem. Si $\frac{b}{c}$ es raíz de $p(x)$, entonces

$$p\left(\frac{b}{c}\right) = a_n\left(\frac{b}{c}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{b}{c}\right) + a_0 = 0.$$

Si multiplicamos esta igualdad por c^n obtenemos:

$$(*) \quad a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} c + \cdots + a_1 b c^{n-1} + a_0 c^n = 0 \cdot c^n = 0.$$

Luego $a_0 c^n = -a_1 b c^{n-1} - \cdots - a_{n-1} b^{n-1} c - a_n b^n$
$= b(-a_1 c^{n-1} - \cdots - a_{n-1} b^{n-2} c - a_n b^{n-1})$.

Es decir $b \mid a_0 c^n$ y como $(b,c) = 1$ se sigue que $b \mid a_0$ como se quería.

Ahora, si de $(*)$ despejamos el término $a_n b^n$, obtenemos:

$$a_n b^n = -a_0 c^n - a_1 b c^{n-1} - \cdots - a_{n-1} b^{n-1} c$$
$$= c(-a_0 c^{n-1} - a_1 b c^{n-2} - \cdots - a_{n-1} b^{n-1}).$$

Es decir $c \mid a_n b^n$ y se sigue que $c \mid a_n$ ■