Algebra Superior 2 — 22·05·20

Def. Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$. Definimos la derivada, $p'(x)$, de $p(x)$ de la siguiente manera:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + n a_n x^{n-1}.$$

Para $n > 1$ definimos la n·ésima derivada, $p^n(x)$, de $(p(x))$ como la derivada de la $(n-1)$·ésima derivada.

Ejemplo.
$$p(x) = 5 + 3x^2 + 7x^4$$
$$p'(x) = 3\cdot 2x + 4\cdot 7x^3 = 6x + 28x^3$$
$$p^2(x) = 6 + 3\cdot 28x^2 = 6 + 84x^2.$$

Prop. Sea $p(x) = q(x) + r(x) \in \mathbb{R}[x]$. Entonces $p'(x) = q'(x) + r'(x)$.

Dem. Ejercicio.

Prop. Sea $p(x) = q(x)r(x) \in \mathbb{R}[x]$. Entonces $p'(x) = q(x)r'(x) + q'(x)r(x)$.

Dem. Ejercicio.

Ejercicio. Sean $q(x) = 7x^2 + 6x + 2$ y $r(x) = 8x^3 + x + 7$. Encuentre la derivada de $q(x)r(x)$.

Def. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, y sean α raíz de $p(x)$ y $m \in \mathbb{N}$. Se dice que α es raíz de multiplicidad m si $(x-\alpha)^m \mid p(x)$ pero $(x-\alpha)^{m+1} \nmid p(x)$.

Ejemplo. 1 es raíz de multiplicidad 2 de $p(x) = x^3 - 3x + 2$.

- Veamos que 1 es raíz:

$$p(1) = 1^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

- Calculemos $p(x)$ entre $x-1$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 2 \\
\hline
x-1 & x^3 + 0x^2 - 3x + 2 \\
 & -\ \underline{x^3 - x^2} \\
 & \quad x^2 - 3x \\
 & \quad -\ \underline{x^2 - x} \\
 & \qquad -2x + 2 \\
 & \qquad \underline{-2x + 2} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Es decir $(x-1) \mid x^3 - 3x + 2$ y

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

Para ver que la raíz es de multiplicidad 2 hay que calcular $p(x)$ entre $(x-1)^2$, o lo que es lo mismo: $x^2 + x - 2$ entre $x-1$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 2 \\
\hline
x-1 & x^2 + x - 2 \\
 & -\ \underline{x^2 - x} \\
 & \quad 2x - 2 \\
 & \quad \underline{2x - 2} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

Y finalmente hay que ver que $x-1 \nmid x+2$ pero esto es claro. Por tanto 1 es raíz de multiplicidad 2 de $p(x)$.

Teo. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y α una raíz de multiplicidad m de $p(x)$. Entonces α es raíz de multiplicidad $m-1$ de $p'(x)$.

Dem. Sabemos que $(x-\alpha)^m \mid p(x)$, por tanto

$p(x)$ es de la forma $p(x) = (x-\alpha)^m q(x)$
con $q(\alpha) \neq 0$.

Entonces

$$p'(x) = (x-\alpha)^m q'(x) + m(x-\alpha)^{m-1} q(x)$$
$$= (x-\alpha)^{m-1} \left(q'(x)(x-\alpha) + m q(x) \right).$$

Así $p'(x) = (x-\alpha)^{m-1} h(x)$

con $h(x) = q'(x)(x-\alpha) + m q(x)$.

Es decir $(x-\alpha)^{m-1} \mid p'(x)$. ■

Teo. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. α es raíz de multiplicidad m de $p(x)$ si y solo si $p(\alpha) = p'(\alpha) = \cdots = p^{m-1}(\alpha) = 0$ y $p^m(\alpha) \neq 0$.

Dem. Haremos la demostración por inducción sobre m.
Supongamos que α es raíz de multiplicidad $m=1$:

$p(x)$ se puede escribir como $p(x) = (x-\alpha)\, g(x)$
y como α es raíz de multiplicidad 1
se tiene que $(x-\alpha) \nmid g(x)$, y $g(\alpha) \neq 0$

$p(\alpha) = 0$

$p'(x) = (x-\alpha) g'(x) + g(x)$

$p'(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$ ✓.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para α raíz de multiplicidad m y demostremos el caso $m+1$:

$$p(x) = (x-\alpha)^{m+1} g(x) \qquad y \qquad (x-\alpha) \nmid g(x).$$

Así $p'(x) = (x-\alpha)^{m+1} g'(x) + (m+1)(x-\alpha)^m g(x)$

$$= (x-\alpha)^m \left((x-\alpha) g'(x) + (m+1) g(x) \right),$$

y $(x-\alpha)$ no divide al 2° factor.

Por tanto α es raíz de multiplicidad m de $p'(x)$, es decir $p'(\alpha) = \dots = p^m(\alpha) = 0$ y $p(\alpha) = 0$ ✓.

Conversamente: Por inducción tambien,

$p(\alpha) = 0$

$p(\alpha) = (x-\alpha) g(x)$

y

$p'(\alpha) \neq 0$.

Entonces $(x-\alpha)^2 \nmid p(x)$ porque en caso contrario

$p(x) = (x-\alpha)^2 g_1(x)$

$p'(x) = 2(x-\alpha) g_1(x) + (x-\alpha)^2 g_1'(x)$ y $p'(\alpha) = 0$

pero esto contradice las hipótesis.

Ahora, supongamos que el resultado es cierto en el caso m y demostremos que es válido para $m+1$.

Partimos de que $p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^m(\alpha) = 0$

y $p^{m+1}(\alpha) \neq 0$

α es raíz de multiplicidad m de $p'(x)$

$p''(x) = (x-\alpha)^m g(x)$ y $(x-\alpha) \nmid g(x)$

Como $p(\alpha) = 0$, $p(x) = (x-\alpha)^s g_1(x)$ ⊛
y $(x-\alpha) \nmid g_1(x)$.

Así, $p'(x) = s(x-\alpha)^{s-1} g_1(x) + (x-\alpha)^s g_1'(x)$
$= (x-\alpha)^{s-1}((x-\alpha)g_1'(x) + sg_1(x))$

y $(x-\alpha)$ no divide al segundo factor.

Al comparar los exponentes en $p'(x)$

como $(x-\alpha)$ no divide ni al 2° factor ni a $g(x)$, entonces:

$m = s-1$ y así $m+1 = s$.

Ahora, por ⊛ $p(x) = (x-\alpha)^{m+1} g_1(x)$ y

$(x-\alpha) \nmid g_1(x)$

pero esto es lo que se quería demostrar ■