DATE 13 . 04 . 20

Algebra Superior 2

Números Complejos

Como les comenté al inicio del curso, uno de los objetivos fundamentales de la materia de Superior 2 es conocer y entender bien distintas estructuras algebraicas.
Para comenzar a estudiar a los números complejos primero estudiaremos en abstracto la estructura algebraica subyacente.

Def. Un conjunto K en el cual están definidas dos operaciones $+: K \times K \to K$ y $\cdot : K \times K \to K$ es llamado un campo si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $a+b = b+a \quad \forall a,b \in K$
2. $a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a,b,c \in K$
3. Existe $0 \in K$ tq $a+0 = a \quad \forall a \in K$.
4. $\forall a \in K$, existe $(-a) \in K$ tq $a+(-a) = 0$.

5. $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in K$
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,b,c \in K$
7. Existe $1 \in K$ tq $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in K$
8. $\forall a \in K, a \neq 0$, existe $a^{-1} \in K$ tq $a \cdot a^{-1} = 1$.

9. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a,b,c \in K$.

Nótese que por definición de $+$ y $\cdot$ las operaciones son cerradas.

Ejemplos: $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son campos.
$\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ no son campos, ¿por qué?

Ejercicio: Así como lo hicimos para anillos, se pueden construir campos finitos. Traten de construir uno con 2 elementos, o con 3.
¿Qué pasa si tratan con 4 elementos?
Regresaremos a este punto más adelante.

El origen desde un punto de vista histórico de los números complejos es muy interesante y aunque no entraremos en detalles aquí piensen en la ecuación

$$x^2 + 1 = 0 .$$

Así como vimos que algunas ecuaciones no tienen solución en los enteros, ésta claramente no tiene solución en los reales.

Los números complejos surgen para que este tipo de ecuaciones sí tengan solución 'en algún lado'.

Pensemos en una ecuación de segundo grado general con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 .$$

Sabemos que las raíces están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, podemos escribir a x de la siguiente manera:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{y} \quad 4ac - b^2 > 0 .$$

Así x es de la forma $A \pm B\sqrt{-1}$ para algún $A, B \in \mathbb{R}$.

De modo que si podemos encontrar una manera de trabajar con objetos de la forma $A + B\sqrt{-1}$ podemos seguir adelante.

Lo primero que haremos es definir operaciones:

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, definimos $(a+b\sqrt{-1}) + (c+d\sqrt{-1})$ de la siguiente manera:

$$(a+b\sqrt{-1}) + (c+d\sqrt{-1}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{-1}.$$

Definimos $(a+b\sqrt{-1})\cdot(c+d\sqrt{-1})$ de la siguiente manera:

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

$$= ac + bd(-1) + (ad+bc)\sqrt{-1}$$

$$= (ac - bd) + (ad+bc)\sqrt{-1}.$$

Con estas operaciones observamos que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$(a+b\sqrt{-1}) + \underbrace{(0+0\sqrt{-1})}_{\text{denotaremos por tanto a este elemento por } 0} = a+b\sqrt{-1}$$

y

$$(a+b\sqrt{-1})\cdot\underbrace{(1+0\sqrt{-1})}_{\text{denotaremos a este elemento por } 1.} = a+b\sqrt{-1}.$$

También tenemos que

pensemos en el inverso aditivo

$$(a+b\sqrt{-1}) + (-a+(-b)\sqrt{-1}) = (a-a) + (b-b)\sqrt{-1}$$
$$= 0 + 0\sqrt{-1}$$
$$= 0.$$

Nos gustaría que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existan $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$(a+b\sqrt{-1})\cdot(x+y\sqrt{-1}) = 1.$$

Veamos que esto pasa: Es decir, encontremos x y y talesque ...

NO

DATE

$(a+b\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1}) = (1+0\sqrt{-1})$

$(a+b\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1}) = (ax-by)+(ay+bx)\sqrt{-1}$

y queremos que

$(ax-by)+(ay+bx)\sqrt{-1} = 1+0\sqrt{-1}$,

es decir,

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ ay + bx &= 0 \end{aligned} \qquad \text{con } a,b,x,y \in \mathbb{R}.$$

Resolviendo: $ay+bx=0 \Rightarrow ay=-bx \Rightarrow y=\frac{-b}{a}x$

y sustituyendo en la otra ecuación:

$$ax-b\left(\frac{-b}{a}x\right)=1 \quad \therefore \quad ax+\frac{b^2}{a}x=1.$$

Así, $\left(a+\frac{b^2}{a}\right)x=1$ y entonces $(a^2+b^2)x=a$.

Es decir $x=\frac{a}{a^2+b^2}$. Ahora, como $y=\frac{-b}{a}x$,

tenemos que $y=\frac{-b}{a}\,\frac{a}{a^2+b^2}=\frac{-b}{a^2+b^2}$.

O lo que es lo mismo:

$$(a+b\sqrt{-1})\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\sqrt{-1}\right)=1.$$

pensemos en el inverso multiplicativo

LOOSE LEAF L1100 7mm×37lines maruman