Algebra Superior 2

Teo. Sea $\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{R}\}$. Este conjunto con las operaciones $+$ y $\cdot$ que definimos es un campo.

Nota: para abreviar la notación, sea $i = \sqrt{-1}$.

dem. 1. $+$ es una operación cerrada:
Si $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, entonces $(a+bi)+(c+di) =$

$$= \underbrace{(a+c)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(b+d)}_{\in \mathbb{R}} i \in \mathbb{C}.$$

2. $+$ es conmutativa:
Si $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, entonces

xq + es conmutativa en $\mathbb{R}$

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i = (c+a)+(d+b)i$$

$$= (c+di)+(a+bi)$$

3. $+$ es asociativa:
Si $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$, entonces

$$[(a+bi)+(c+di)] + (e+fi) = ((a+c)+(b+d)i) + (e+fi)$$

$$= [(a+c)+e] + [(b+d)+f]\,i$$

xq + es asociativa en $\mathbb{R}$

$$= [a+(c+e)] + [b+(d+f)]\,i$$

$$= (a+bi) + [(c+e)+(d+f)]\,i$$

4. Existe un neutro aditivo: $0+0i$
Si $a,b \in \mathbb{R}$, entonces $(a+bi)+(0+0i) =$

$$(a+0)+(b+0i) = a+bi$$

El elemento $0+0i \in \mathbb{C}$ se denotará por 0.

5. Existencia de inversos aditivos

Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces como ya vimos

$$(a+bi) + ((-a)+(-b)i) = 0$$

6. · es una operación cerrada

Si $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, entonces $(a+bi)(c+di) =$

$$(\underbrace{ac-bd}_{\in \mathbb{R}}) + (\underbrace{ad+bc}_{\in \mathbb{R}})i \in \mathbb{C}.$$

7. · es una operación conmutativa

Si $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, entonces $(a+bi)(c+di) =$

xq · es conmutativa en $\mathbb{R}$

$$(ac-bd)+(ad+bc)i = (ca-db)+(da+cb)i$$

$$= (c+di)(a+bi)$$

8. · es una operación asociativa

Si $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$, entonces

$$[(a+bi)(c+di)](e+fi) = [(ac-bd)+(ad+bc)i](e+fi)$$

$$= [(ac-bd)e - (ad+bc)f] + [(ac-bd)f + (ad+bc)e]i$$

$$= [ace - bde - adf - bcf] + [acf - bdf + ade + bce]i$$

$$= [ace - adf - bcf - bde] + [acf + ade - bdf + bce]i$$

$$= (a+bi)[(ce-df)+(cf+de)i]$$

$$= (a+bi)[(c+di)(e+fi)]$$

9. Existe un neutro multiplicativo: $1+0i$
Si $a,b \in \mathbb{R}$, entonces $(a+bi)(1+0i) = a+bi$

El elemento $1+0i$ se denotará por 1.

10. Existencia de inversos multiplicativos
Como vimos, si $a,b \in \mathbb{R}$ entonces

$$(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = 1.$$

11. Distributividad
Si $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$, entonces

$$(a+bi)((c+di)+(e+fi)) = (a+bi)((c+e)+(d+f)i)$$

$$= [a(c+e) - b(d+f)] + [b(c+e) + a(d+f)]i$$

$$= [ac+ae-bd-bf] + [bc+be+ad+af]i$$

$$= (a+bi)(c+di) + (a+bi)(e+fi)$$

$\therefore$ $\mathbb{C}$ es un campo con las operaciones definidas ■