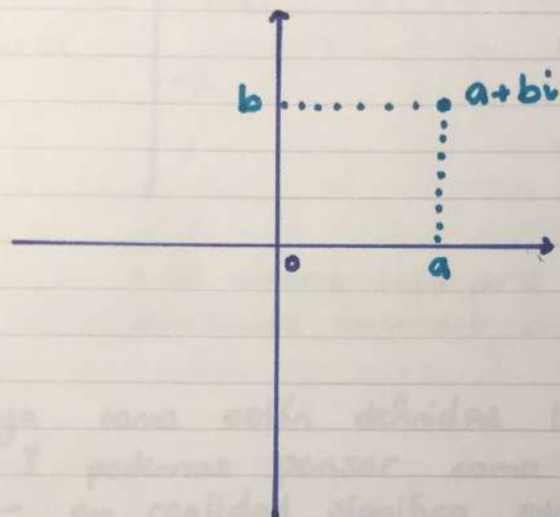
DATE 17 04 20

Algebra Superior 2

Dado que $\mathbb{C} = \{a+bi : a,b \in \mathbb{R}\}$ podemos pensar en una correspondencia entre cada número complejo $a+bi$ y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Así, podemos represtar a los números complejos de la siguiente manera:



Para nombrar los ejes introducimos las siguientes definiciones:

Def. Sea $a+bi \in \mathbb{C}$, a es llamada la parte real de $a+bi$ y b es llamada la parte imaginaria de $a+bi$.

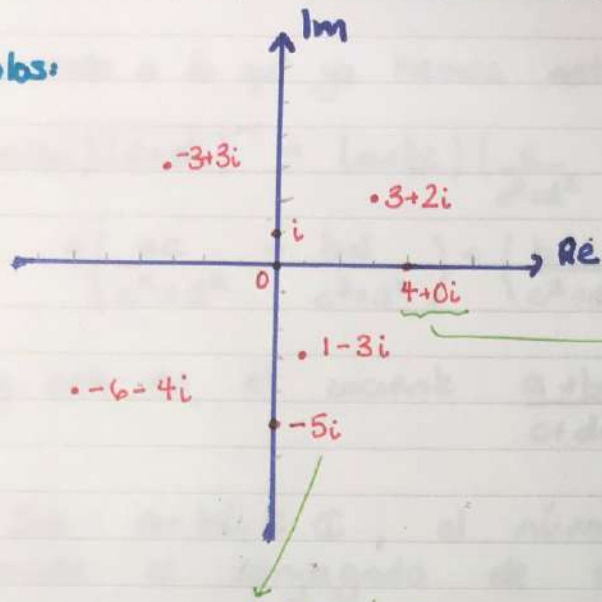
Notación: $Re(a+bi) = a$

$Im(a+bi) = b$

Obs Dado un número complejo, tanto su parte real como su parte imaginaria son números reales.

Ahora, regresando a la representación geométrica de $\mathbb{C}$ tiene sentido llamar 'al eje x' el eje real y 'al eje y' el eje imaginario.

Ejemplos:



A los números cuya parte imaginaria sea 0 los denotaremos únicamente con su parte real: $4+0i = 4$

A los números cuya parte real sea 0 los denotaremos únicamente por su parte imaginaria.

Sabemos ya como están definidas las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathbb{C}$. Y podemos pensar como definir $-$ y $\div$, en donde $-$ en realidad significa sumar a un complejo el inverso aditivo de otro número complejo y $\div$ significa multiplicar a un número complejo por el inverso multiplicativo de otro. Veamos cómo:

Si $a+bi \in \mathbb{C}$ y $c+di \in \mathbb{C}$, podemos definir

$(a+bi) - (c+di)$ como $(a-c)+(b-d)i$
que es lo mismo que pensar a $-(c+di)$ como $(-c-di)$.

Pensemos ahora en la división:

Si $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$ y $c+di \neq 0$ entonces para obtener el cociente

$\dfrac{a+bi}{c+di}$ lo que tenemos que hacer es $(a+bi)(c+di)^{-1}$.

De acuerdo a lo que ya hemos visto

$$(a+bi)(c+di)^{-1} = (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right)$$

$$= \left(\frac{ac}{c^2+d^2} + \frac{bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc}{c^2+d^2} \frac{-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

y este es el cociente $\frac{a+bi}{c+di}$.

Def. Sea $a+bi \in \mathbb{C}$, el número $a-bi$ es llamado el conjugado de $a+bi$.

Notación: el conjugado de $a+bi$ se denota por $\overline{a+bi} = a-bi$.

Ejercicio. Dado $a+bi \in \mathbb{C}$, ¿cuál es la representación geométrica de $a+bi$ y $a-bi$?

Dibuje un plano complejo y encuentre $\overline{i}$, $\overline{1+2i}$, $\overline{3-3i}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{0}$, $\overline{1-i}$.

Obs. Otra forma de obtener $\frac{a+bi}{c+di}$ es la siguiente:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \underbrace{\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}}_{\text{equivalente a multiplicar por 1}} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Ejercicio: Calcule

1. $(2+3i)/(5-6i)$
2. $(2+i)/(1-i)$
3. $(2+2i)/(1+i)$
4. $(3+2i)/(4+3i)$
5. $(1+2i)/(-2+i)$
6. $(1+i)^2$
7. $(1+i)^8$.