DATE 20 . 04 . 20

Algebra Superior 2

Para facilitar la notación con frecuencia en lugar de escribir $a+bi \in \mathbb{C}$ escribiremos $z \in \mathbb{C}$ y se entendera que z es de la forma $a+bi$. Y en realidad lo que estamos diciendo es que si $z \in \mathbb{C}$, entonces $z = Re(z) + i(Im(z))$.

Así, si $z \in \mathbb{C}$ entonces $\bar{z} \in \mathbb{C}$ y

$$z = Re(z) + iIm(z)$$
$$\bar{z} = Re(z) - iIm(z).$$

Teo. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{-z} = -\bar{z}$
3. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
4. Si $w \neq 0$, entonces $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$
5. $\bar{\bar{z}} = z$
6. $z + \bar{z} = 2Re(z)$
7. $z - \bar{z} = 2iIm(z)$.

Dem. 1. Sean $z = a+bi$ y $w = c+di$, entonces $\bar{z} = a-bi$ y $\bar{w} = c-di$.

Así $z+w = (a+c) + (b+d)i$
y $\overline{z+w} = (a+c) - (b+d)i$.

Por otro lado $\bar{z} + \bar{w} = (a-bi) + (c-di)$
$= (a+c) + (-b-d)i$
$= (a+c) - (b+d)i$ ✓.

2. Si $z = a+bi$, entonces $-z = -a-bi$ y $\overline{-z} = -a+bi$.
Por otro lado $\bar{z} = a-bi$ y $\therefore -\bar{z} = -a+bi$ ✓.

NO

DATE

3. Si $z = a+bi$ y $w = c+di$, entonces

$$zw = (ac-bd) + (ad+bc)i \quad y \therefore$$

$$\overline{zw} = (ac-bd) - (ad+bc)i.$$

Por otro lado $\bar{z} = a-bi$ y $\bar{w} = c-di$ y entonces

$$\bar{z}\bar{w} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd) + (-ad-bc)i$$
$$= (ac-bd) - (ad+bc)i \quad ✓$$

4. Si $w \neq 0$, por 3 tenemos que

$$\overline{(z/w)}\;\overline{w} = \overline{(zw/w)} = \bar{z}$$

$$y \therefore \overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w} \quad ✓.$$

5. Si $z = a+bi$, entonces $\bar{z} = a-bi$ y $\bar{\bar{z}} = a-(-bi)$

$$\therefore \bar{\bar{z}} = a+bi \quad ✓$$

6. Si $z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$ y $\therefore$

$$z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z) \quad ✓.$$

7. Si $z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$ y $\therefore$

$$z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = bi + bi = 2i\,\mathrm{Im}(z) \quad ✓$$

■

Def. Sea $z = a+bi \in \mathbb{C}$. El módulo de z es el número real positivo dado por $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Obs. $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}$.

Es decir $z\bar{z} = |z|^2$.

Ejercicio: Calcule

1. $|2+i|$
2. $|-3-4i|$
3. $|7i|$
4. $|i^{16}|$
5. $|-2|$
6. $|7+7i|$

Teo. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $|z| \geq 0$ y $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|-z| = |z|$
4. $|zw| = |z||w|$
5. si $w \neq 0$, entonces $|z/w| = |z|/|w|$
6. $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$
7. $|z+w| \leq |z| + |w|$
8. $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$.

Dem. 1. Si $z = a+bi$, por definición $|z| = a^2+b^2$ y com $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $|z| \geq 0$.
Supongamos que $z = 0$, entonces $|z| = 0^2+0^2 = 0$ y conversamente si $|z| = 0$ entonces $a^2+b^2 = 0$ y como $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a = b = 0$ y $\therefore$ $z = 0$ ✓

2. $|z| = a^2+b^2$ y $|\bar{z}| = a^2+(-b)^2 = a^2+b^2$ ✓

3. $|z| = a^2+b^2$ y $|-z| = (-a)^2+(-b)^2 = a^2+b^2$ ✓

4. $|zw|^2 \overset{\text{por la observación de la página anterior}}{=} (zw)(\overline{zw}) = (zw)(\bar{z}\bar{w}) \underset{\text{asociatividad en } \mathbb{C}}{=} z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$

$= (|z||w|)^2$

y sacando raíz cuadrada en $\mathbb{R}$ se sigue el resultado ✓

5. Si $w \neq 0$, por 4: $\left|\frac{z}{w}\right||w| = \left|\frac{z}{w}w\right| = |z|$ y

$\therefore$ $|z/w| = |z|/|w|$ ✓

NO

DATE

6. Como $z = a + bi$, $|Re(z)| = |a|$ y $|z| = a^2 + b^2$
y como $|a| \leq a^2 + b^2$ se sigue el resultado.

Igualmente para $|Im(z)| = |b|$ ✓

7. $$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 + (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2\end{aligned}$$
y el resultado se sigue ✓

8. $\bar{z}/|z|^2 = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$ ✓

■