Tarea 1

Entrega: 5 de marzo de 2020.

1. ¿Es el conjunto de todos los enteros pares un dominio entero? Justifique su respuesta.
2. Muestre que el anillo de las matrices de 2×2 tiene divisores de cero.
3. Pruebe que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{Z}$ si $n \in \mathbb{Z}$.
4. Pruebe que $n^7 - n$ es divisible entre 42 si $n \in \mathbb{Z}$.
5. Sea $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Pruebe que $(A, +, \times)$ es un anillo conmutativo con unidad si las operaciones se definen de acuerdo a las siguientes tablas:

$+$	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	γ	α
γ	γ	α	β

$\times$	α	β	γ
α	α	α	α
β	α	β	γ
γ	α	γ	β

6. Defina un anillo con cuatro elementos en el cual existan dos elementos distintos del neutro aditivo pero cuyo producto sea el neutro aditivo. Es necesario que demuestre que el conjunto en efecto es un anillo con las operaciones que defina.
7. Sea D un dominio entero y sean $a, b, c \in D$. Supongamos que $a \neq 0$ y que $ab = ac$, pruebe que $b = c$.
8. Sea $A = \{(m, n) : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$. Definimos en A la suma y el producto de la siguiente manera: $(m, n) + (p, q) = (m + p, n + q)$ y $(m, n)(p, q) = (mp, nq)$. También definimos $-(m, n) = (-m, -n)$. Pruebe que A es un anillo con estas operaciones. ¿Tiene A divisores del cero?
9. Sea $(A, +, \times)$ un conjunto en donde se cumplen todos los axiomas para ser un anillo con unidad con excepción de la conmutatividad de la suma. Pruebe que $a + b = b + a$ para todos $a, b \in A$ de manera que $(A, +, \times)$ sí es un anillo con unidad.
10. Encuentre todas la soluciones enteras de las siguientes desigualdades:
    (a) $x^2 + 3x + 4 \geq 2$
    (b) $\frac{x+3}{x-2} > 0$
    (c) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$
    (d) $-2 < \frac{2}{x} < 3$.