Tarea 4

1. Utilice el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el residuo al dividir en cada uno de los casos siguientes $a(x)$ entre $b(x)$ en $\mathbb{R}[x]$.
   (a) $a(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ y $b(x) = x^2 + 2$
   (b) $a(x) = x^2 + 2$ y $b(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$
   (c) $a(x) = x^7 + \frac{1}{2}x$ y $b(x) = x - 1$
   (d) $a(x) = x^2 + \sqrt{2}x - 1$ y $b(x) = x - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
2. Sea $f(x) = x^9 - 1$. Exprese $f(x)$ como suma de potencias de $x - 1$.
3. Encuentre todas las raíces en $\mathbb{C}$ de $x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x^3$.
4. Pruebe que $x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 28x^3 - 25x^2 + 40x + 50$ no tiene ninguna raíz racional.
5. Diga si los polinomios (de $\mathbb{R}[x]$) en cada uno de los siguientes incisos son iguales.
   (a) $p_1(x) = (x + 2)^7$ y $p_2(x) = x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$
   (b) $p_3(x) = (x - 3)^6$ y $p_4(x) = -x^6 + 18x^5 - 135x^4 + 540x^3 - 1215x^2 + 1458x - 729$
   (c) $p_5(x) = x^4 - 2x^3 - 67x^2 + 260x - 252$ y $p_6(x) = (x - 2)^2(2x + x^2 - 63)$
   (d) $p_7(x) = \frac{x^4-14x^3+71x^2-154x+120}{x-2}$ y $p_8(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$
   (e) $p_9(x) = 32x^6 - 176x^5 + 320x^4 - 280x^3 + 130x^2 - 31x + 3$ y $p_{10}(x) = \frac{(2x-1)^5(x-3)(2x-7)^2}{4x^3-40x^2+133x-147}$.
6. Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y sea d un número real. Sean α, β, γ los coeficientes de las potencias de $x - d$ en la representación $p(x) = \alpha(x - d)^2 + \beta(x - d) + \gamma$. Exprese a α, β, γ en términos de a, b, c y d.
7. Escriba al polinomio $p(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 24x + 16$ como producto de dos polinomios de grado dos con coeficientes reales.
8. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio irreducible. Pruebe que $(p(x), p'(x)) = 1$.