Examen Parcial 2

1. (2.5 puntos) Dé un ejemplo de una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converja en l^{∞} pero no en l^1. Demuestre que la sucesión que exhiba satisface la propiedad que se pide.

2. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se dice que $\| \ \|$ y $\| \ \|'$ son dos normas equivalentes en X si existen dos constantes positivas m y M tales que $m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$ para toda x en X. En este caso escribimos $\| \ \| \sim \| \ \|'$.

   (a) (0.5 puntos) En $C[0,1]$ exhiba un conjunto que sea acotado con la norma
   $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$ pero que no sea acotado con la norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

   (b) (0.5 puntos) Pruebe que todo conjunto acotado en $C[0,1]$ con la norma $\| \ \|_\infty$ es acotado con la norma $\| \ \|_1$.

   (c) (0.5 puntos) Pruebe que en $C[0,1]$ $\| \ \|_\infty$ no es equivalente a $\| \ \|_1$.

3. (2.5 puntos) Pruebe que el espacio $(C[a,b], \| \ \|_1)$ no es un espacio de Banach.

4. (2.5 puntos) Sea $(\bar{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $(l^\infty, \| \ \|_\infty)$. Pruebe que si $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{x} \in l^\infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_{nr} = x_r$ para toda $r \geq 1$ en donde $\bar{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nr}, \dots)$ y $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r, \dots)$.

5. (1 punto) Pruebe que $\delta(A) = \delta(\bar{A})$ para $A \subseteq (X,d)$.

OPCIONAL (1 punto)

Supongamos que (X, d_1) y (Y, d_2) son espacios métricos y que $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Pruebe que $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$.