Examen Parcial 3

1. (2.5 puntos) Demuestre que si $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces A es totalmente acotado si y solo si es acotado.

2. (2.5 puntos) Sea $Y \subseteq (X, d)$. ¿Es cierto que $\partial(Y)$ siempre es un conjunto cerrado? Justifique su respuesta.

3. (2.5 puntos) Pruebe que si (X, d) es un espacio métrico separable y Z es un subconjunto cerrado y no numerable de X, entonces Z es la unión de un conjunto perfecto y un conjunto numerable.

4. Sea $T : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ una traslación, es decir, $T(x) = x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$ en donde b es un vector fijo de $\mathbb{R}^p$.

   (a) (.25 puntos) Pruebe que T es una función continua.

   (b) (.25 puntos) Pruebe que si $K \subset \mathbb{R}^p$ es compacto, entonces

   $$b + K = \{b + x : x \in K\}$$

   es compacto en $\mathbb{R}^p$.

   (c) (.5 puntos) Pruebe que si $U \subset \mathbb{R}^p$ es abierto, entonces $b + U$ es abierto en $\mathbb{R}^p$.

   (d) (.5 puntos) Pruebe que $V + U = \{v + u : v \in V, u \in U\}$ es abierto en $\mathbb{R}^p$ si U, V son abiertos en $\mathbb{R}^p$.

   (e) (1 punto) Pruebe que $H + K$ es compacto en $\mathbb{R}^p$ si H, K son compactos en $\mathbb{R}^p$.