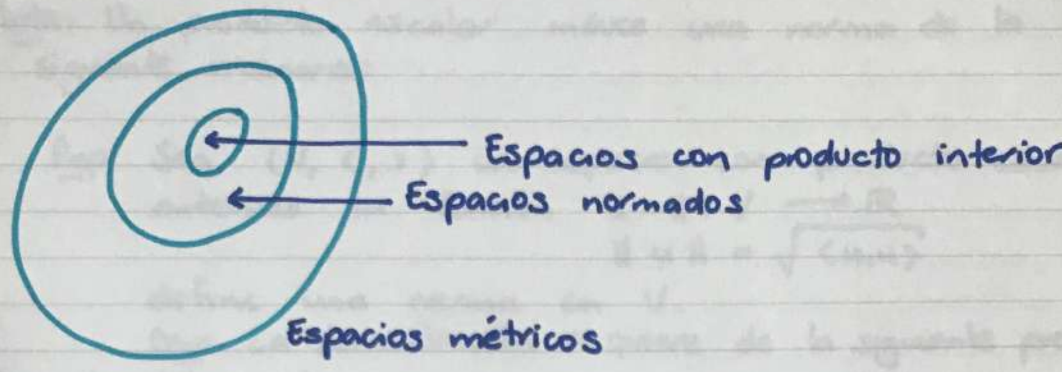
NO

DATE 25 . 03 . 20

Análisis Matemático I



Def. Sea X un conjunto. Una función $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama una métrica (o distancia) si cumple las sigs propiedades:

1. $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X$ y $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y \in X$.
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in X$.

La pareja (X,d) es llamada un espacio métrico.

Def. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$*. Una función $\|\ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada una norma si cumple lo siguiente:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in X$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ para todo escalar λ y $x \in X$.
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x,y \in X$.

La pareja $(V, \|\ \|)$ es llamada un espacio normado.

* Este curso es un curso de análisis real por lo que el campo será $\mathbb{R}$ al menos de que se diga otra cosa.

Def. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$*. Una función $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ es llamada un producto interior si cumple que:

1. $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in V$.
2. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \quad \forall\, x,y \in V$.
3. $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$ y $x,y \in V$.
4. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \quad \forall\, x,y,z \in V$.

La pareja $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ es llamada un espacio con producto interior.

* Note que si el campo se cambia por $\mathbb{R}$, la propiedad 2 se vuelve $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad \forall\, x,y \in V$.

Nota: Un producto escalar induce una norma de la siguente manera:

Prop. Sea $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio con producto escalar, entonces la función $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

define una norma en V.

Dem. La demostración requiere de la siguente proposición:

Prop. Si $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ es un espacio con producto escalar, entonces $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$, donde $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, $\forall\, u, v \in V$.

(Esta desigualdad se conoce como la desigualdad de Cauchy - Schwartz)

Realice la demostración como ejercicio.

Nota: Una norma induce una distancia de la siguente manera:

Prop. Sea $(V, \| \ \|)$ un espacio normado, entonces la función $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d(u, v) = \|v - u\|$$

define una métrica en V.

Dem. Ejercicio.

Es muy importante que se conzcan y se manejen bien diferentes ejemplos de espacios. Revisen con cuidado todos los ejemplos en las notas impresas junto con sus demostraciones.