DATE 24 04 20

Análisis Matemático I

Prop. Sea $A \subseteq (X,d)$ ent, $\overline{A} = A^\circ \cup \partial(A)$.

Dem. $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$

$\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \subseteq \overline{A}$

$\therefore \; A^\circ \cup \partial(A) \subseteq \overline{A}$.

Para ver la otra contención sea $x_0 \in \overline{A}$:

p.d. $x_0 \in A^\circ$ o $x_0 \in \partial(A)$

Si $x_0 \in A^\circ$ el resultado se sigue, entonces supongamos que $x_0 \notin A^\circ$ y veamos que $x_0 \in \partial(A)$

Como $x_0 \notin A^\circ$ para cada $\varepsilon > 0$

$B_\varepsilon(x_0) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

y además $B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$ porque $x_0 \in \overline{A}$

entonces $x_0 \in \partial(A)$ por definición ■

Obs. Sea $A \subseteq (X,d)$. A es abierto $\Leftrightarrow A = A^\circ$

A es cerrado $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

pero como $\overline{A} = A \cup A'$,

A es cerrado $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

pero también $\overline{A} = A^\circ \cup \partial(A)$

A es cerrado $\Leftrightarrow \partial(A) \subseteq A$.

Sea (X,d) un espacio métrico y $Y \subseteq X$. Consideremos el espacio métrico (Y,d).

Si $y_0 \in Y$ podemos pensar en los conjuntos

$$B_r^X(y_0) = \{x \in X : d(x,y_0) < r\}$$
$$B_r^Y(y_0) = \{y \in Y : d(y,y_0) < r\}.$$

Luego, $B_r^Y(y_0) = B_r^X(y_0) \cap Y$.

Prop. Sea $U \subseteq (X,d)$ abierto. Existe una familia $\mathcal{F}$ de bolas abiertas en X tal que $U = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$.

Dem. Si $U = \emptyset$ es resultado es trivial.
Si $U \neq \emptyset$, $\forall x \in U$ existe una bola abierta B_x tal que $x \in B_x \subseteq U$

$$\therefore \quad U \subseteq \bigcup_{x \in U} B_x \subseteq U \; \blacksquare$$

Obs.
Si $V \subseteq (Y,d)$ es abierto con $Y \subseteq X$, entonces

$$V = \bigcup_{y \in V} B_y^Y = \bigcup_{y \in V} (B_y^X \cap Y) = \Big(\bigcup_{y \in Y} B_y^X \Big) \cap Y$$

notemos que este conjunto es abierto en X

Prop. V es abierto en Y si y solo si $V = U \cap Y$ para algún abierto U en X.

Dem. $\Rightarrow]$ Se sigue de la observación anterior.

$\Leftarrow]$ sea $V = U \cap Y$ con U abierto en X
y sea $y_0 \in U \cap Y$

como $y_0 \in U$, existe $r > 0$ tal que $B_r^X(y_0) \subseteq U$

$\therefore B_r^X(y_0) \cap Y \subseteq U \cap Y$

y $B_r^Y(y_0) \subseteq U \cap Y = V$ ∎

Ejercicio. F es cerrado en $Y \iff F = H \cap Y$ para algún conjunto cerrado H en X

Nota. Si $Y \subseteq (X,d)$, $A \subseteq Y$, entonces

$$\overline{A}^X = \{x \in X : d(x,A) = 0\}$$

la cerradura en X

$$\overline{A}^Y = \{y \in Y : d(y,A) = 0\}$$

la cerradura en Y.

Obs. $\text{Int}^X(A) \subseteq \text{Int}^Y(A)$ y la contención contraria no se cierta en general.

Ej. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,1]$, $A = (0,1]$

$\text{Int}^X(A) = (0,1)$
$\text{Int}^Y(A) = (0,1]$.

Teorema del encaje en espacios métricos.

Sea (X,d) un espacio completo, y sean $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ subconjuntos cerrados de X.
Si $A_i \neq \emptyset \ \forall i$ y $\lim_{i\to\infty} diam(A_i) = 0$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset \quad \text{y consta de un único punto.}$$

Dem. Sea $x_n \in A_n$ para cada $n \geq 1$.
Veamos que $(x_n)_n$ es de Cauchy:

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $diam(A_n) < \varepsilon$ si $n \geq N$

y en particular $diam(A_N) < \varepsilon$.

Si $n, m > N$ entonces $x_n, x_m \in A_N$ y $\therefore$

$$d(x_n, x_m) \leq diam(A_N) < \varepsilon.$$

Es decir, $(x_n)_n$ sí es de Cauchy y como el espacio es completo, converge.

Sea $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Se tiene que
$$x_0 \in \overline{A_1} = A_1$$
$$x_0 \in \overline{A_2} = A_2$$
$$\vdots$$
$$\therefore \ x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Si hubiera otro punto $y_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ se tendría

que $0 \leq d(y_0, x_0) \leq diam(A_n) \ \forall n$ y

$\therefore \ y_0 = x_0$ ■