Análisis Matemático I

Prop. Sea $A \subseteq (X, d)$. $x \in A' \iff B_\varepsilon(x) \cap A$ es infinito $\forall \varepsilon > 0$.

Dem. $\Leftarrow]$ Supongamos que $B_\varepsilon(x) \cap A$ es infinito $\forall \varepsilon > 0$, entonces $(B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A$ es infinito $\forall \varepsilon > 0$.

En particular $[B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}] \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon$,

es decir, $x \in A'$.

$\Rightarrow]$ Supongamos que $x \in A'$ y que $\exists\, r > 0$ talque $B_r(x) \cap A$ es finito.

Entonces $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ xq $x \in A'$ y se sigue que $\exists\, a_1, \dots, a_n$ en X tales que

$$B_r(x) \cap A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Sea $\delta = \frac{1}{2} \min \{ d(x, a_i) : 1 \leq i \leq n \}$,

$[B_\delta(x) \setminus \{x\}] \cap A = \emptyset$ pero esto es una contradicción porque $x \in A'$ ■

Prop. Sea $A \subseteq (X, d)$. $x \in A' \iff \exists\, (a_n)_n$ en A talque $a_n \to x$ y $a_n \neq a_m$ si $n \neq m$.

Dem. $\Rightarrow]$ $[B_1(x) \setminus \{x\}] \cap A \neq \emptyset$, eso quiere decir

que existe $a_1 \in [B_1(x) \setminus \{x\}] \cap A$.

Sea $0 < r_2 < \min \{ d(x, a_1), 1/2 \}$,

$$a_2 \in [B_{r_2}(x) \setminus \{x\}] \cap A.$$

Sea $0 < r_3 < \min \{ d(x, a_2), 1/3 \}$

$$a_3 \in [B_{r_3}(x) \setminus \{x\}] \cap A$$

y así sucesivamente. Tenemos que $a_n \neq a_m$ y

$$0 \leq d(a_n, x) < r_n < \frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad a_n \longrightarrow x$$

$\Leftarrow]$ Sea $\varepsilon > 0$ p.d. $[B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}] \cap A \neq \emptyset$.

Sabemos que existe una sucesión $(a_n)_n$ en A tq $a_n \longrightarrow x$ y $a_n \neq a_m$ si $n \neq m$.

$\therefore \; \exists \; N > 0$ tal que $a_n \in B_\varepsilon(x)$ si $n \geq N$

y $\therefore \; [B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}] \cap A \neq \emptyset$. Es decir, $x \in A'$ ■

Conocemos ya el Teorema de Bolzano-Weierstrass que afirma que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente. Ahora podemos enunciar una versión conjuntista del mismo teorema:

Teo de Bolzano-Weierstrass. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado e infinito, entonces $B' \neq \emptyset$.

Dem. Como B es infinito, sabemos que contiene un conjunto numerable, digamos $\{a_1, a_2, \ldots\}$ con $a_n \neq a_m$ si $n \neq m$.
Como $(a_n)_n$ es una sucesión en B, que es un conjunto acotado, entonces tiene una subsucesión convergente, digamos $(a_{n_k})_k$ y supongamos que $x = \lim_{k \to \infty} a_{n_k}$.

Entonces $x \in \{a_1, a_2, \ldots\}'$

y $\therefore \quad x \in B'$ ■

Def. Sea $K \subseteq (X,d)$. Se dice que K es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto de K.

Ejercicio. Demuestre el teorema de Heine-Borel:

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto $\iff$ K es cerrado y acotado

Obs. La 'ida' de teorema es válida en general en cualquier espacio métrico.

Ej. Considere (X,d) en donde $X=(0,1)$ y d es la métrica usual. X no es compacto porque la sucesión $(1/n)_n$ no tiene ninguna subsucesión que converja a un punto de X.

(*) **Teo.** Sea $f:(X,d_X) \longrightarrow (Y,d_Y)$ una función continua y sea $K \subseteq X$ compacto. Entonces $f(K)$ es compacto.

Antes de demostrar este teorema veamos qué relación hay entre las funciones continuas y los conjuntos abiertos y cerrados:

Teo. Sea $f:(X,d_X) \longrightarrow (Y,d_Y)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es continua en X
2. Para todo $x \in X$ es cierto que si $x_n \to x$, entonces $f(x_n) \to f(x)$.
3. $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo abierto U en Y.
4. $f^{-1}(H)$ es cerrado en X para todo cerrado H en Y.
5. $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$ con $B \subseteq X$.

Dem. En clase se había demostrado ya que $1 \iff 2$.

Veamos entonces que $3 \iff 4$, $1 \iff 3$ y que $2 \Rightarrow 5$ y $5 \Rightarrow 4$.

$3 \Rightarrow 4]$ Sea H cerrado en Y, entonces $Y \setminus H$ es abierto en Y

$\therefore$ $f^{-1}(Y \setminus H)$ es abierto en X

$f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(H) = X \setminus f^{-1}(H)$ es abierto en X

$\therefore$ $f^{-1}(H)$ es cerrado en X.

$4 \Rightarrow 3]$ Sea U abierto en Y, entonces $Y \setminus U$ es cerrado en Y

$\therefore$ $f^{-1}(Y \setminus U)$ es cerrado en X

$\underbrace{f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(U)}_{= \, X \setminus f^{-1}(U)}$ es cerrado en X

y $\therefore$ $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

$1 \Rightarrow 3]$ Sea V abierto en Y p.d. $f^{-1}(V)$ es abierto en X

sea $a \in f^{-1}(V)$, entonces $f(a) \in V$

$\therefore$ $\exists\ \varepsilon > 0$ talque $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$

$\exists\ \delta > 0$ talque $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$

$\therefore$ $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

$3 \Rightarrow 1]$ Sea $a \in X$ p.d. f es continua en a, ie.

dado $\varepsilon > 0$ p.d $\exists\ \delta > 0$ talque $d(x, a) < \delta$

implica que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

ie. p.d. $x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$

$f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ es abierto en X porque

$B_\varepsilon(f(a))$ es abierto en Y

$a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow \exists\ \delta > 0$ tq

$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$.

$2 \Rightarrow 5]$. Sea $a_0 \in \overline{B}$ p.d. $f(a_0) \in \overline{f(B)}$.

Como $a_0 \in \overline{B}$ existe una sucesión $(a_n)_n$ en B que converge a a_0

$$a_n \longrightarrow a_0$$

$$\therefore \quad f(a_n) \longrightarrow f(a_0)$$

pero $f(a_n) \in f(B)$ $\forall n$

$$\therefore \quad f(a_0) \in \overline{f(B)}.$$

$5 \Rightarrow 4]$. Sea H cerrado en Y p.d. $f^{-1}(H)$ es cerrado en X

p.d. $\overline{f^{-1}(H)} \subseteq f^{-1}(H)$

$$f\left[\overline{f^{-1}(H)}\right] \subseteq \overline{f[f^{-1}(H)]} \subseteq \overline{H}$$

$$f(f^{-1}(H)) \subseteq H$$

$$\therefore \quad \overline{f^{-1}(H)} \subseteq f^{-1}(H) \blacksquare$$

Dem de teo ⊛ : Sea $(y_n)_n$ una sucesión en $f(K)$ ie. $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in K$.

Como K es compacto, $(x_n)_n$ tiene una subsucesión convergente a un punto en K.

Digamos $(x_{n_k})_k \longrightarrow x_0 \in K$.

Como f es continua

$$\underbrace{f(x_{n_k})}_{\parallel} \longrightarrow f(x_0) \in f(K)$$

$$y_{n_k} \longrightarrow f(x_0) \in f(K)$$

$$\therefore \quad f(K) \text{ es compacto} \blacksquare$$