Análisis Matemático I

Prop. Sea $f: K \subseteq (X,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con K compacto. Entonces $f(K)$ es acotado y existen $x^*, x_* \in K$ tales que f alcanza su valor mínimo y su valor máximo en K en x_* y x^* respectivamente.

Dem. Como K es compacto, entonces $f(K)$ es compacto y por tanto $f(K)$ es acotado.

Como $f(K)$ es acotado existe $A = \sup\{f(x) : x \in K\}$ y $A \in \overline{f(K)} = f(K)$.
Por tanto $A = f(x)$ para alguna $x \in K$, digamos x^*.
Así $A = \max\{f(x) : x \in K\}$.

De la misma manera existe $B = \inf\{f(x) : x \in K\}$, $B \in \overline{f(K)} = f(K)$ y $\therefore$ $B = f(x)$ p. a. $x \in K$, digamos x_*, así $B = \min\{f(x) : x \in K\}$.

Necesitamos las siguientes definiciones para demostrar un resultado importante:

Def. Sea $A \subseteq (X,d)$. Se dice que un conjunto $R \subseteq X$ es una ε-red de A si $A \subseteq \bigcup_{x \in R} B_\varepsilon(x)$.

Si R es finito, entonces se dice que es una ε-red finita de A.

Def. Sea $B \subseteq (X,d)$. Se dice que B es totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ B tiene una ε-red finita.

Ejercicio. Sea $B \subseteq (X,d)$. Pruebe que si B es totalmente acotado entonces es acotado.

¿Es cierto el converso?

Prop. Sea $K \subseteq (X,d)$ compacto, entonces K es totalmente acotado.

Dem. Supongamos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que no existe una ε_0-red finita de K.

Sea $x_1 \in K$, K no está contenido en $B_{\varepsilon_0}(x_1)$.

Luego, existe $x_2 \in K$ tal que $x_2 \notin B_{\varepsilon_0}(x_1)$, es decir, tal que $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$.

K no está contenido en $B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)$ y $\therefore$ existe $x_3 \in K$ tal que $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon_0$ y $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon_0$

$\vdots$

y así sucesivamente: Existe una sucesión $(x_n)_n$ en K tal que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$ si $n \neq m$.

Es decir, ninguna subsucesión de $(x_n)_n$ es de Cauchy y $\therefore$ ninguna subsucesión converge. Pero esto es una contradicción porque K es compacto.

Por tanto debe existir una ε-red finita de K $\forall\ \varepsilon > 0$ ■

Prop. Sea $K \subseteq (X,d)$ totalmente acotado, entonces (K,d) es separable.

Dem. Sea $A_1 = \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_{n_1}^1\}$ una 1-red finita de K.
Sea $A_2 = \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_{n_2}^2\}$ una $\frac{1}{2}$-red finita de K.

$\vdots$

para $m \in \mathbb{N}$ sea $A_m = \{x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots, x_{n_m}^m\}$ una $\frac{1}{m}$-red finita de K.

$\vdots$

Ahora, sea $K_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, K_0 es numerable.

Afirmación $\overline{K_0}^K = K$, es decir, $\overline{K_0} \cap K = K$.

Basta ver que $\overline{K_0} \subseteq K$:

Sea $x \in K$ p.d. $x \in \overline{K_0}$, es decir, que $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x) \cap K_0 \neq \emptyset$.
Sea $\varepsilon > 0$:
Sea $m \in \mathbb{N}$ talque $\frac{1}{m} < \varepsilon_0$, existe $1 \le i \le m$ talque

$d(x, x_i^m) < \frac{1}{m} < \varepsilon_0$ $\therefore$ $x_i^m \in K_0$
y este es el punto que garantiza que $B_\varepsilon(x) \cap K_0 \neq \emptyset$ ∎

Corolario. Sea $K \subseteq (X,d)$ compacto, entonces (K,d) es separable.

Teo. Sea $K \subseteq (X,d)$ compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
1. Toda cubierta abierta en X de K tiene una subcubierta finita de K.
2. (Prop de B-W.) Todo subconjunto infinito $B \subseteq K$ tiene un punto de acumulación en K.
3. K es compacto.

Dem. $1 \Rightarrow 2]$ Sea $B \subseteq K$ infinito y supongamos que B no tiene puntos de acumulación en K.

Para cada $y \in K$ existe una bola abierta $B(y)$ tal que $(B(y) \setminus \{y\}) \cap B = \emptyset$.

Por otro lado $K \subseteq \bigcup_{y \in K} B(y)$. ie.

$\{B(y) : y \in K\}$ es una cubierta abierta de K, $\therefore$
$\exists\, y_1, \dots, y_n \in K$ tal que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i)$

pero como $B \cap B(y_i)$ es a lo mucho y_i

$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i)$ implica que B es finito !

$\therefore$ $B' \neq \emptyset$.

$2 \Rightarrow 3$] Sea $(y_n)_n$ una sucesión en K.
Hay dos casos:
1. $\{y_n : n \geq 1\}$ es finito.
En este caso existe $x_0 \in K$ tq $y_n = x_0$ para una infinidad de n.
Sea $(y_{n_k})_k$ la subsucesión formada de manera que $y_{n_k} = x_0 \quad \forall k$.
Esta subsucesión converge a x_0.

2. $\{y_n : n \geq 1\}$ es infinito.
En este caso existe una subsucesión $(y_{n_k})_k$ tal que $y_{n_k} \neq y_{n_{k'}}$ si $k \neq k'$.

Además (y_{n_k}) tiene un punto de acumulación en K, digamos y_0.

$\therefore$ Existe otra subsucesión $(y_{n_{k_j}})_j$ tal que

$y_0 = \lim_{j \to \infty} y_{n_{k_j}}$ $\quad \therefore$ K es compacto.

$3 \Rightarrow 1$] Sea $F = \{U_\alpha\}$ una cubierta abierta en X de K.

$K \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$. Por la proposición anterior F tiene una subcubierta de K numerable.

. si la cubierta es finita se sigue el resultado.
. Si no la subcubierta es enumerable: $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$.

$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$

Supongamos que no existe n tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Como K no está contenida en U_1, existe $x_1 \in K$ tal que $x_1 \notin U_1$.

Como K no está contenido en $U_1 \cup U_2$, existe $x_2 \in K$ tal que $x_2 \notin U_1 \cup U_2$

$\vdots$

Como K no está contenido en $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$, existe $x_n \in K$ tal que $x_n \notin U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$

Así, $(x_n)_n$ es una sucesión en K y si $m > n$ entonces $x_m \notin U_n$

$x_m \notin U_1$
$x_m \notin U_2$
$\vdots$
$x_m \notin U_n$

Y $(x_n)_n$ tiene una subsucesión que converge a un punto en K
$(x_{n_k})_k \longrightarrow x_0 \in K$.

$x_0 \in U_n$ para alguna n

Como $x_0 = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$ existe $N > 0$ tal que

$x_{n_k} \in B_\varepsilon(x_0) \subseteq U_n$ si $n_k \geq N$.

Es decir, a partir de N toda la sucesión (x_{n_k}) está en U_n.
Ahora por un lado debe existir x_{n_j} con $n_j > n$ tal que $x_{n_j} \in U_n$
pero por el otro $x_{n_j} \notin U_1 \cup U_2 \dots \cup U_n \cup \dots \cup U_{n_j}$

pero esto es una contradicción

$\therefore$ debe existir una subcubierta finita para K ∎