Análisis Matemático I

04·05·20

Def. Sea $f: (X,d) \to (Y,d)$ una función. Decimos que f es uniformemente continua en X si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para $x, y \in X$.

Noten que continuidad uniforme implica continuidad.

Ejemplos:

1. $f: [0,1] \to \mathbb{R}$
   $f(x) = x^2$ es uniformemente continua:

   xq $x, y \in [0,1]$

   $$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x-y||x+y| \le 2|x-y|$$

   Así, dado $\varepsilon > 0$

   si $|x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ entonces $|f(x) - f(y)| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2. $f: (0,1) \to \mathbb{R}$
   $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua pero no es uniformemente continua:

   Sea $\varepsilon = 1$, ¿existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < 1$? Para ver que no supongamos que sí:

   Podemos suponer que $0 < \delta < 1$ (¿por qué?)

   Sea $x = y + \frac{\delta}{2}$ con $x, y \in (0,1)$ y $y = \frac{\delta}{2}$

   $$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{|xy|}$$

   $$= \left|\frac{\frac{\delta}{2} - y - \frac{\delta}{2}}{(y + \frac{\delta}{2})\frac{\delta}{2}}\right| = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}(\delta)} = \frac{1}{\delta} > 1$$

   Es decir, $|f(x) - f(y)| > 1$.

Teo. Sea $f: (X,d) \to (Y,d)$ uniformemente continua. Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en X entonces $(f(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy en Y.

Dem. Sea $\varepsilon > 0$ p.d $\exists N > 0$ tal que $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ si $n,m \geq N$.

Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x,y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, y por hipótesis existe $N > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < \delta$ si $n, m \geq N$.
Por tanto, $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ si $n,m \geq N$ ■

Obs. El resultado no es cierto si f es solo continua:
$f: (0,1) \to \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad x_n = \frac{1}{n}$

Def. Sea $f: (X,d) \to (Y,d)$. Se dice que f es Lipschitz continua si existe $M > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq M\, d(x,y)$.

Obs. Una función Lipschitz continua es uniformemente continua.

Ejercicios:

1. Pruebe que la función seno es uniformemente continua en $\mathbb{R}$
(Sug: use TVM)
2. Pruebe que cualquier métrica es uniformemente continua.

Prop. Sean $K_1 \subseteq (X,d)$ y $K_2 \subseteq (Y,d)$ compactos. Entonces $K_1 \times K_2$ es compacto.

Teo. Sea $f: K \subseteq (X,d) \to (Y,d)$ continua con K compacto. Entonces f es uniformemente continua.

Dem. Supongamos que f no es unifomemente continua. Es decir, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n, y_n \in K$ tales que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ y $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$.

$(x_n, y_n) \in K \times K$ que es compacto por la prop anterior.

$\therefore$ $(x_n, y_n)_n$ tiene una subsucesión convergente digamos $(x_{n_k}, y_{n_k})_k \longrightarrow (x_0, y_0)$

Ahora, $\quad 0 \leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$

$$\therefore \quad d(x_{n_k}, y_{n_k}) \longrightarrow 0$$

$$\therefore \quad x_0 = y_0$$

Pero $\quad d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \longrightarrow d(f(x_0), f(y_0)) = 0$

y $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon_0$

lo cual es una contradicción ●