Análisis Matemático I 06·05·20

Sucesiones de Funciones

Def. Sean $f, f_n : (X,d) \longrightarrow (Y, \| \ \|)$ funciones, $n \geq 1$. Se dice que $(f_n)_n$ converge puntualmente a f en X si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon \quad \text{si } n \geq N.$$

En este caso escribiremos $f_n \longrightarrow f$ en X o $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Def. Sean $f, f_n : (X,d) \longrightarrow (Y, \| \ \|)$ funciones, $n \geq 1$. Se dice que $(f_n)_n$ converge uniformemente a f en X si dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon \quad \text{si } n \geq N \text{ para todo } x \in X.$$

En este caso escribiremos $f_n \xrightarrow{unif} f$ en X.

Nota: Es claro que la convergencia uniforme de una sucesión implica la convergencia puntual, ¿por qué?

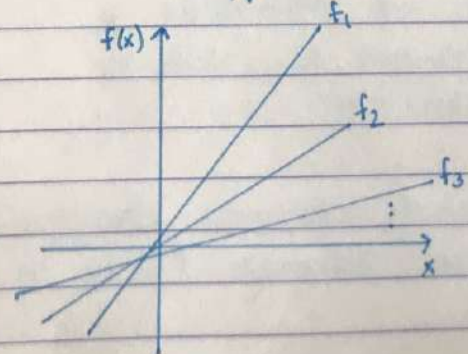
Nota: En esta parte del curso trabajaremos en espacios normados pero les pido que noten que las definiciones anteriores tienen sentido en espacios métricos.

Ejemplos:

1. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_n(x) = \dfrac{x}{n}$

$(f_n(x))_n = \left(\frac{x}{n}\right)_n \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$

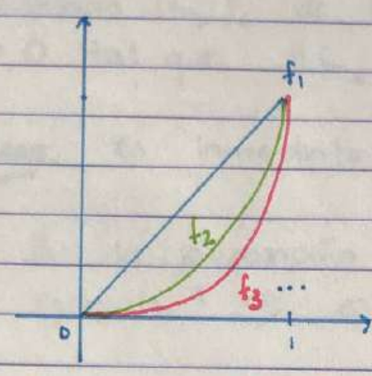


$f_n \longrightarrow 0$ puntualmente en $\mathbb{R}$.

2. $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n$

$(f_n(x))_n = (x^n)_n$



$$(x^n) \to \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

si $n \to \infty$

de manera puntual

Es decir si $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}, \quad \text{entonces}$$

$f_n \to f$ en $[0,1]$.

- Observe que f no es una función continua aunque cada f_n sí lo era.

3. $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n} \longrightarrow x \quad \text{puntualmente}$$

4. $f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

y observemos que $\left| \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \right| \leq \frac{1}{n}$, es decir, la convergencia no depende de x y $\therefore$ es uniforme.

Ejercicio: Complete todos los detalles de las demostraciones de los 4 ejemplos anteriores.

Prop. Sean $f_n, f : (X, d) \longrightarrow (Y, \| \ \|)$ funciones. $(f_n)_n$ no converge uniformemente a f en X si existen una subsucesión $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$, una sucesión $(a_n)_n$ en X y $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\| f_{n_k}(a_k) - f(a_k) \| > \varepsilon_0$ para toda k.

Dem. Es inmediata a partir de la definición.

Nota. Por la proposición anterior la convergencia del ejemplo 1 no es uniforme.

Prop. Sean $f_n : (X, d) \to (Y, \| \ \|)$ funciones continuas. Si $f_n \xrightarrow{unif} f$ en X en donde $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \| \ \|)$ es una función, entonces f es continua en X.

Obs. El ejemplo 2 muestra que el converso de este resultado no es cierto en general.

Dem. Sea $x_0 \in X$ p.d. f es continua en x_0.

Sea $\varepsilon > 0$, veamos que existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$ entonces $\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$.

Para cualquier n sabemos que

$$\| f(x) - f(x_0) \| \leq \| f(x) - f_n(x) \| + \| f_n(x) - f_n(x_0) \| + \| f_n(x_0) - f(x_0) \|$$

como $f_n \xrightarrow{unif} f$, existe $N > 0$ tal que

$$\| f_n(x) - f(x) \| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si } n \geq N \quad \forall x \in X$$

Ahora, $\| f(x) - f(x_0) \| < \frac{2\varepsilon}{3} + \| f_N(x) - f_N(x_0) \|$

y sabemos que f_N es continua, $\therefore \ \exists \ \delta > 0$ tq $\| f_N(x) - f_N(x_0) \| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $d(x, x_0) < \delta$.

Así $\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$ si $d(x, x_0) < \delta$ ∎

Consideremos un conjunto $K \subseteq (X,d)$ compacto,

$$C(K) = \{ f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua} \}.$$

Sabemos que $\| f \|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$

y se tiene que $f_n \xrightarrow{\| \|_\infty} f \iff f_n \xrightarrow{unif} f$ en K.

Consideremos ahora $K \subseteq (X,d)$, $(Y, \| \ \|)$ y el espacio de las funciones acotadas:

$$\mathcal{B}(K, Y) = \{ f : K \to Y \mid f \text{ es acotada} \}$$

tambien se tiene que $f_n \xrightarrow{\| \|_\infty} f \iff f_n \xrightarrow{unif} f$ en K

en donde recordamos que $\| f \|_\infty = \sup_{x \in K} \| f(x) \|$.

Ejemplos:

5. $f_n(x) = \frac{x}{e^{nx}}$ en $\mathbb{R}^+$

$$\frac{x}{e^{nx}} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty$$

$$\left\| \frac{x}{e^{nx}} - 0 \right\|_\infty = \sup_{x>0} \left| \frac{x}{e^{nx}} \right| = \sup_{x>0} \frac{x}{e^{nx}}$$

Recurramos al cálculo:

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{e^{nx}} = \frac{e^{nx} - xne^{nx}}{e^{2nx}}$$

La derivada se anula si $e^{nx} - xne^{nx} = 0$, es decir si $e^{nx} = xne^{nx}$ o lo que es lo mismo si $1 = xn$ y $\therefore$ $x = \frac{1}{n}$.

Es fácil ver que en el punto $\frac{1}{n}$, f_n tiene un máximo y $\therefore$

$$\sup_{x>0} \frac{x}{e^{nx}} = \frac{1/n}{e} \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

y $\therefore$ la convergencia es uniforme.

6. $f_n(x) = \frac{x^2}{e^{nx}}$ para $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

$\frac{x^2}{e^{nx}} \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$

$\left\| \frac{x^2}{e^{nx}} - 0 \right\|_\infty = \sup\limits_{x \geq 0} \frac{x^2}{e^{nx}}$ y nuevamente

tenemos que:

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{e^{nx}} = \frac{2xe^{nx} - nx^2e^{nx}}{e^{2nx}} = \frac{2x - nx^2}{e^{nx}}$$

si $f'_n(x) = 0$ entonces $x = 0$ o $x = \frac{2}{n}$

$f(0) = 0$ y en $\frac{2}{n}$ hay un máximo $\therefore$

$\| f_n - 0 \|_\infty = \frac{4}{n^2} \frac{1}{e^2} \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$ y

la convergencia es uniforme ∎