Análisis Matemático I 08·05·20

Teo. Sea $f_n : (X,d) \to (Y, \| \ \|)$ una función para cada $n \in \mathbb{N}$. $(f_n)_n$ converge uniformemente en X si y solo si dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ para $x \in X$.

Obs. Llamaremos a esta propiedad una condición uniforme de Cauchy.

Dem. Supongamos que $(f_n)_n$ converge uniformemente en X a una función f. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$ de modo que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

si $x \in E$ y $n, m \geq N$.

Conversamente, supongamos que se cumple la condición uniforme de Cauchy: se sigue que la sucesión $(f_n(x))_n$ converge para cada x (¿por qué?)

Sea $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ y sea $\varepsilon > 0$.

Existe $N > 0$ tq $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

Fijemos n y dejemos que $m \to \infty$, entonces como $f_m(x) \to f(x)$, tenemos que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{si } n \geq N \quad \forall x \in X \blacksquare$$

Análisis Matemático I

08·05·20

Vimos que la convergencia uniforme 'preserva' la continuidad, el propósito del siguiente teorema es ver que también 'preserva' la integrabilidad.

Teo. Sean f_n funciones Riemann·integrables en $[a,b]$ y tales que $f_n \xrightarrow{unif} f$ en $[a,b]$. Entonces f es Riemann·integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \, dx = \int_a^b f \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx .$$

Nota: La existencia del límite es parte del enunciado del teorema

Dem. Como $f_n \xrightarrow{unif} f$ podemos considerar, para cada n,

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| .$$

Luego $f_n - \varepsilon_n \leq f \leq f_n + \varepsilon_n$ y así al considerar las integrales por arriba y por abajo tenemos que:

$$\int_a^b f_n - \varepsilon_n \, dx \leq \underline{\int_a^b} f dx \leq \overline{\int_a^b} f dx \leq \int_a^b f_n + \varepsilon_n \, dx .$$

Entonces

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f dx - \underline{\int_a^b} f dx \leq 2\varepsilon_n (b-a)$$

(usando el hecho que si $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$ ent $0 \leq \gamma - \beta \leq \delta - \alpha$).

Como $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$ $\overline{\int_a^b} f dx = \underline{\int_a^b} f dx$ y

$\therefore$ f es Riemann·integrable.

Así tenemos ahora que $\left| \int_a^b f dx - \int_a^b f_n dx \right| \leq \varepsilon_n (b-a)$ y se sigue el resultado ∎

Cor. Sean f_n funciones Riemann-integrables en $[a,b]$ y $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ el límite uniforme en $[a,b]$.
Entonces
$$\int_a^b f\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,dx.$$

Dem. Es inmediata a partir del teorema anterior.

Obs. El corolario muestra que dadas las hipótesis la serie puede ser integrada término a término.

Ejemplo. Sea $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}}$ $n=1,2,3\ldots$

se puede ver que $f_n \longrightarrow 0$.
Es decir $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

y entonces $f'(x) = 0$.

Por otro lado $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$

y por tanto $(f_n')_n$ no converge a f'.

→ Este ejemplo muestra que la convergencia uniforme y la derivación no guardan entre sí la misma relación que la convergencia uniforme y la integración.

Teo. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones derivables en $[a,b]$ y tal que $(f_n(x_0))_n$ converge para algún punto $x_0 \in [a,b]$. Si $(f_n')_n$ converge uniformemente en $[a,b]$, entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ a una función f, y se cumple que
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \text{con } x \in [a,b].$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

y $|f_n'(t) - f_m'(t)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ con $t \in [a,b]$.

revísenlo si no lo recuerdan

Por el teorema del valor medio aplicado a la función $f_n - f_m$ tenemos que:

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leq \frac{|x-t|\,\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para cualesquiera $x, t \in [a,b]$ y $n, m \geq N$.

Ahora,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0) + f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

$$\leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

y por tanto $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para $x \in [a,b]$ si $n, m \geq N$

de modo que (f_n) converge uniformemente en $[a,b]$.

Sea $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para $x \in [a,b]$.

Ahora, fijemos un punto $x \in [a,b]$ y definamos

$$\varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \quad \text{y}$$

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{para } a \leq t \leq b \text{ y } t \neq x.$$

Entonces $\lim_{t \to x} \varphi_n(t) = f_n'(x) \qquad n \in \mathbb{N}$.

Además $|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ si $n, m \geq N$

(¿por qué?)

de modo que $(\varphi_n)_n$ converge uniformemente para $t \neq x$.

Como (f_n) converge a f podemos concluir que

$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ uniformemente para $t \in [a,b]$ si $t \neq x$.

Estas últimas 2 cosas juntas muestran que

$$\lim_{t \to x} \varphi(t) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) \qquad \text{(¿por qué?)}$$

que es lo que se quería demostrar.