Análisis Matemático I 11·05·20

Teo. de Dini Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : K \subseteq (X,d) \to \mathbb{R}$ una función continua, donde K es un conjunto compacto. Supongamos que $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x \in K$ y que $f_n \to f$ en K con f una función continua. Entonces $f_n \to f$ uniformemente en K.

Dem. Sea $\varepsilon > 0$ p.d. existe $N > 0$ tal que
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ si $n \geq N$ para toda $x \in K$.

Sea $A_n = \{x \in K : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Como $f_n \to f$ y $(f_n)_n$ es monótona, entonces

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in K : f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\} \\ &= \{x \in K : (f - f_n)(x) \geq \varepsilon\} \\ &= (f - f_n)^{-1}([\varepsilon, \infty)). \end{aligned}$$

Así, A_n es cerrado y tenemos que

$$A_n \supseteq A_{n+1} \quad \forall n.$$

Veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$:

Sea $x_0 \in K$ p.d. $x_0 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Como $f_n(x_0) \longrightarrow f(x_0)$, existe $n_0 > 0$ tal que
$f(x_0) - f_n(x_0) < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.
Entonces $x_0 \notin A_{n_0}$

y $\therefore$ $x_0 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Si no lo recuerdan búsquenlo.

Ahora dado el teorema del encaje de Cantor, se sigue que para alguna $N \in \mathbb{N}$, $A_N = \emptyset$.

En otras palabras:

$A_N = \{x \in K : f(x) - f_N(x) \geq \varepsilon\} = \emptyset$

y por tanto, $\{x \in K : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\} = K$.

Pero esto es lo que se quería demostrar.

Análisis Matemático I 11·05·20

Teo. de Weierstrass

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es el límite uniforme de una sucesión de polinomios definidas en $[a,b]$.

Obs. Otra manera de enunciar este esultado es diciendo que el conjunto de polinomios es denso en el espacio de las funciones continuas.

Dem. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $[a,b] = [0,1]$ y que $f(0) = f(1) = 0$ ya que si el teorema se prueba para este caso podemos tomar $g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)]$ para $0 \leq x \leq 1$. Se cumpliría entonces que $g(0) = g(1) = 0$ y por tanto es el límite uniforme de polinomios. Y por tanto, lo mismo sería cierto para f ya que $f-g$ es un polinomio: $f(x) - g(x) = f(0) + x[f(1) - f(0)]$.

Ahora, sea $f(x) = 0$ si x está fuera de $[0,1]$. Como f es continua en $[0,1]$ es uniformemente continua ya que $[0,1]$ es compacto y al extenderla como 0, es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Sea $Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ en donde tomamos c_n de manera que

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1.$$

(Calculen los primeros c_n)

Ahora, $\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} c_n(1-x^2)^n\,dx = 1$ y si calculamos $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx$ podemos obtener información sobre el tamaño de c_n:

porque la función es par

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n\,dx$$

porque $1 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)\,dx = 2\left(x-\frac{nx^3}{3}\right)_0^{1/\sqrt{n}}$$

¿porqué?

$$= \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Entonces $c_n < \sqrt{n}$. Esto implica que para cualquier $\delta > 0$ con $\delta \leq |x| \leq 1$ se tiene que $Q_n(x) \leq \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$ y entonces al no depender de x esta desigualdad tenemos que $Q_n \to 0$ uniformemente en $\delta \leq |x| \leq 1$.

Sea $P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt \qquad 0 \leq x \leq 1,$

al hacer un cambio de variable obtenemos que

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt = \underbrace{\int_0^1 f(t)\,Q_n(t-x)\,dt}_{\text{polinomio en } x}$$

Así, $(P_n(x))_n$ es una sucesión de polinomios.

Ahora, dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que si $|y-x| < \delta$ entonces $|f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Y sea $M = \sup|f(x)|$.

Tenemos ahora usando todo lo que hemos obtenido que por $0 \leq x \leq 1$:

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} (f(x+t) - f(x))\, Q_n(t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\, dt$$

$$\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt$$

$$\leq 4M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$ si n es suficientemente grande.

Y esto es lo que se quería demostrar.

Para demostrar este teorema en su versión generalizada (llamado el Teorema de Stone-Weierstrass) necesitamos primero unas definiciones y lemas.

Def. Una familia $\mathcal{A}$ de funciones reales o complejas definidas en un conjunto X es llamada un álgebra si

1. $f+g \in \mathcal{A}$ cuando $f, g \in \mathcal{A}$
2. $fg \in \mathcal{A}$ cuando $f, g \in \mathcal{A}$
3. $\alpha f \in \mathcal{A}$ cuando $f \in \mathcal{A}$ y α constante.

Si $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de que si $f_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ y $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ implican que $f \in \mathcal{A}$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ es uniformemente cerrada.

Def. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones en X. Decimos que $\mathcal{F}$ separa puntos de X si para cada pareja de puntos distintos x_1 y x_2, existe una función $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ejercicio: Pruebe las siguentes lemas:

Lema. $(C_{\mathbb{R}}(K), \|\ \|_{\infty})$ es un álgebra, donde K es un conjunto compacto y $C_{\mathbb{R}}(K)$ son las funciones continuas reales definidas en K.

Todas las siguentes lemas se refieren a una subálgebra $\mathcal{A}$ de $C_{\mathbb{R}}(K)$.

Lema. Si $\mathcal{A}$ es una subalgebra entonces $\overline{\mathcal{A}}$ también lo es.

Lema. Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra y $f \in \mathcal{A}$, entonces $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.

Lema. Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra y $f, g \in \mathcal{A}$, entonces $\max(f, g)$ y $\min(f, g) \in \overline{\mathcal{A}}$.