Análisis Matemático I 13·05·20

Teorema de Stone Weierstrass

Sea $K \subseteq (X,d)$ un conjunto compacto y sea $\mathcal{A} \subseteq C_{\mathbb{R}}(K)$ una subálgebra que contiene a las constantes y separa puntos de K. Entonces toda función continua definida en K es el límite uniforme de una sucesión de funciones en $\mathcal{A}$.

Obs. Denotaremos por $\overline{\mathcal{A}}$ a la cerradura bajo límites uniformes en el caso de conjuntos de funciones. De esta forma el teorema afirma que $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(K)$.

Para demostrar el teorema haremos uso de los lemas de las notas del 11·05·20 y del siguiente:

Lema. La función $\sqrt{x}$ es el límite uniforme de polinomios en $[0,1]$.

Obs. Este resultado se sigue del Teo. de Weierstrass sin embargo considero que es muy enriquecedor ver la prueba directa:

Dem. Consideremos la siguiente sucesión:

$$u_1 \equiv 0$$
$$u_2(t) = \frac{1}{2}t$$
$$\vdots$$
$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - u_n^2(t)\right) \qquad n \geq 1.$$

$(u_n)_n$ es una sucesión de polinomios.

Veremos que:
1. $0 \leq u_n(t) \leq \sqrt{t}$ $\quad t \in [0,1], n \in \mathbb{N}$
2. $u_n(t) \leq u_{n+1}(t)$ $\quad t \in [0,1], n \in \mathbb{N}$
3. $u_n(t) \longrightarrow \sqrt{t}$ $\quad t \in [0,1]$

Y por el Teorema de Dini podemos concluir que para $t \in [0,1]$, $u_n(t) \xrightarrow{\text{unif}} \sqrt{t}$.

p.d. 1) por inducción sobre n:

- Si $n=1$, entonces $0 \leq 0 \leq \sqrt{t}$ ✓.
- Supongamos ahora que $0 \leq u_n(t) \leq \sqrt{t}$

  y demostremos que $0 \leq u_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)) = u_n(t) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}u_n^2(t)$$

y sabemos que $u_n^2(t) \leq t$.

Por tanto $u_n(t) + \frac{1}{2}(t) - \frac{1}{2}u_n^2(t) \geq 0$.

$$0 \leq \sqrt{t} - u_{n+1}(t) = \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}u_n^2(t)$$

$$= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}(\sqrt{t} - u_n(t))(\sqrt{t} + u_n(t)) \geq 0$$

✓.

p.d. 2) $u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}\underbrace{(t - u_n^2(t))}_{\geq 0} \geq u_n(t)$ ✓.

p.d. 3) Por 1 y 2 sabemos que $\lim_{n\to\infty} u_n(t_0)$ existe

para cada $t_0 \in [0,1]$ y que es menor o igual que $\sqrt{t_0}$.

Sea $l = \lim_{n\to\infty} u_n(t_0)$, entonces

$$\begin{array}{ccccc} u_{n+1}(t_0) & = & u_n(t_0) & + & \frac{1}{2}(t_0 - u_n^2(t_0)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l & & l & & \frac{1}{2}(t_0 - l^2) \end{array}$$ y si $n \to \infty$

Es decir, $l = l + \frac{1}{2}(t_0 - l^2)$ y por tanto $t_0 = l^2$, o lo que es lo mismo $l = \sqrt{t_0}$ ∎

Nota. Si el lema que dice que si $f \in \mathcal{A}$ entonces $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$ no les ha salido pueden usar el lema que acabamos de demostrar:

- si $f = 0$ ✓
- si $f \neq 0$ consideren $\dfrac{|f(x)|^2}{\|f\|_\infty^2}$ que toma valores entre 0 y 1.

y consideren los polinomios $(u_n)_n$.

$$u_n \xrightarrow{unif} \sqrt{t}$$

$$\therefore \quad u_n\left(\frac{|f|^2}{\|f\|_\infty^2}\right) \xrightarrow{unif} \sqrt{\frac{|f|^2}{\|f\|_\infty^2}}$$

Esto implica que $\dfrac{|f|}{\|f\|_\infty} \in \overline{\mathcal{A}}$ pero $\mathcal{A}$ contiene constantes, $\therefore \ \|f\|_\infty \dfrac{|f|}{\|f\|_\infty} \in \overline{\mathcal{A}}$ ✓.

Necesitamos 1 lema más:

Lema. Dados $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$, $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in K$, existe $g_{x_0} \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que $g_{x_0}(x_0) = f(x_0)$ y

$$g_{x_0}(x) > f(x) - \varepsilon \quad \text{para toda } x \in K.$$

Dem. Sea $x_1 \in K$ tal que $x_1 \neq x_0$. Como $\mathcal{A}$ separa puntos existe una función h tal que $h(x_0) \neq h(x_1)$.

Y podemos suponer que existen funciones h_0 y h_1 tales que $h_0(x_0) \neq 0$ y $h_1(x_1) \neq 0$ (¿por qué?)

Luego, sean $u = hh_1 - h(x_0)h_1$
$v = hh_0 - h(x_1)h_0$.

$u, v \in \mathcal{A}$ y

$$u(x_0) = h(x_0)h_1(x_0) - h(x_0)h_1(x_0) = 0$$
$$v(x_1) = h(x_1)h_0(x_1) - h(x_1)h_0(x_1) = 0$$

$$u(x_1) = h(x_1)h_1(x_1) - h_0(x_0)h_1(x_1) \neq 0$$
$$v(x_0) = h(x_0)h_0(x_0) - h(x_1)h_0(x_0) \neq 0.$$

Ahora si suponemos que están dados dos constantes c_0 y c_1, la función $z(x)$ dada por

$$z(x) = \frac{c_0 v(x)}{v(x_0)} + \frac{c_2 u(x)}{u(x_1)} \in \mathcal{A}$$

satisface que $z(x_0) = c_0$ y $z(x_1) = c_1$.

(En otras palabras, podemos encontrar en el álgeba una función que no solo se pare a los puntos x_0 y x_1, sino que en ellas tome valores predeterminadas).

Ahora, para cada $y \in K$ podemos encontrar una función h_y tal que

$$h_y(x) = f(x)$$
$$h_y(y) = f(y).$$

Como h_y es continua, existe un abierto J_y que contiene al punto y y tal que

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon \quad \text{si } t \in J_y.$$

Como K es compacto existen $y_1, \dots, y_n$ tales que

cubierta finita

$$K \subseteq J_{y_1} \cup J_{y_2} \cup \dots \cup J_{y_n}.$$

Sea ahora $g_{x_0} = \max(h_{y_1}, \dots, h_{y_n})$.

Por un lema $g_{x_0} \in \bar{A}$ y tiene las propiedades deseadas por construcción ■

Demostración del teorema:

Consideremos las funciones g_x dadas para cada $x \in K$ mediante el lema anterior.

Como cada g_x es continua, existen abiertos V_x que contienen a x y son tales que

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \qquad \text{para} \quad t \in V_x.$$

Como K es compacto, existen puntos $x_1, \dots, x_m$ tales que

$$K \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_m}.$$

Sea $h = \min(g_{x_1}, \dots, g_{x_m})$, $h \in \bar{A}$, y por el lema anterior

$$h(t) > f(t) - \varepsilon \qquad \text{si} \quad t \in K,$$

y también se tiene que por construcción

$$h(t) < f(t) + \varepsilon \qquad \text{si} \quad t \in K.$$

Por tanto $|h(x) - f(x)| < \varepsilon$ si $x \in K$

pero esto es equivalente al resultado deseado: $\bar{A}$ es denso en $C_{\mathbb{R}}(K)$ ■