Análisis Matemático I 18·05·20

En las Notas 12 vimos que si $K \subseteq (X,d)$ es compacto entonces K es totalmente acotado.
El converso no es cierto en general al menos que se agregue una hipótesis más como lo muestra el siguiente teorema.

Teo. Sea $K \subseteq (X,d)$. K es compacto si y solo si (K,d) es completo y totalmente acotado.

Corolario. Sea (X,d) un espacio completo. $K \subseteq (X,d)$ es compacto si y solo si K es cerrado y totalmente acotado.

Dem del teorema.

$\Rightarrow]$ Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en K. Veamos que converge a un punto de K:

Como K es compacto se tiene que $(x_n)_n$ tiene una subsucesión, digamos $(x_{n_k})_k$, que converge a un punto $x_0 \in K$, pero como $(x_n)_n$ es de Cauchy se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tq

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_{n_k}, x_0) + d(x_{n_k}, x_n) < \varepsilon \text{ si } n, n_k \geq N.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Además K es totalmente acotado como ya se había visto.

$\Leftarrow$] Sea $(x_n)_n$ una sucesión en K. Veremos que tiene una subsucesión que converge a un punto de K:

Basta probar que tiene una subsucesión de Cauchy puesto que el espacio (K, d) es completo.

Sea $A = \{x_n : n \geq 1\}$.

- Si A es finito podemos tomar una subsucesión constante y el resultado se sigue.

- Si A es infinito
  existen $y_1^1, y_2^1, \dots, y_{n_1}^1 \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B_1(y_i^1).$$

En particular existe $1 \leq i_0 \leq n_1$ tal que hay una subsucesión de $(x_n)_n$ contenida en $B_1(y_{i_0}^1)$. En otras palabras una infinidad de términos de la sucesión, de elementos de A, caen en una bola.

Sea $x_1^1, x_2^1, \dots$ subsucesión de $(x_n)_n$ tal que $d(x_n^1, x_m^1) < 2 \quad \forall n, m$

Existen $y_1^2, \dots, y_{n_2}^2 \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_2} B_{\frac{1}{2}}(y_i^2).$$

Sean ahora $x_1^2, x_2^2 \dots$ una subsucesión de $(x_n^1)_n$ tal que $d(x_n^2, x_m^2) < 1 \quad \forall n, m.$

Y así sucesivamente para bolas de radio $\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

$x_1^r, x_2^r, \dots$, subsucesión de la anterior tal que

$$d(x_n^r, x_m^r) < \frac{2}{r} \quad \forall n,m \dots \quad \text{etc.}$$

Consideremos ahora la sucesión $(x_1^1, x_2^2, x_3^3, \dots, x_n^n, \dots)$ que es una subsucesión de $(x_n)_n$.

Veamos que es una sucesión de Cauchy:

Consideremos $d(x_n^n, x_m^m)$ con $m < n$, en este caso x_n^n y x_m^m están en la sucesión con superíndices m

$$\therefore \ d(x_n^n, x_m^m) < \frac{2}{m} \quad \blacksquare$$

Ejercicio. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Pruebe que A es acotado si y solo si A es totalmente acotado.

Equicontinuidad

Def. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones de un espacio (X,d) en otro (Y,d). Decimos que la familia es equicontinua en $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$ entonces $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Obs. Si la familia es finita y las funciones son continuas en x_0, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua en $x_0 \in X$. (¿por qué?)

Ejemplo. Sea $\mathcal{F} = \{ f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f_n(x) = x^n \}$.

- Si $0 \leq x_0 < 1$ entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua en x_0
  - sugerencia: recuerde que
  $$|x^n - a^n| = |x-a||x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}|$$
- Si $x_0 = 1$ entonces $\mathcal{F}$ no es equicontinua en x_0
  - pruebe que dado $\varepsilon > 0$ no existe ningún $\delta > 0$ tal que si $|x-1| < \delta$ entonces $|x^n - 1| < \varepsilon$.
    sug: tome un ε fijo (digamos $\frac{1}{2}$) y vea que para ese $\nexists\ \delta$.

Def. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones de (X,d) en (Y,d). Si $\mathcal{F}$ es equicontinua en $x_0 \in X$ $\forall\, x_0 \in X$, decimos que $\mathcal{F}$ es equicontinua en X.

Def. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones de (X,d) en (Y,d). Decimos que $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua en X si dado $\varepsilon > 0$ exist $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ $\forall x, y \in X$ y $f \in \mathcal{F}$.