# Análisis Matemático I

20·05·20

**Prop.** Sean $K \subseteq (X,d)$ compacto y $f_n : K \to (Y,d)$ una función continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformemente en $K$, entonces $\mathcal{F} = (f_n)_n$ es uniformemente equicontinua en $K$.

**Dem.** Sea $\varepsilon > 0$ p.d. existe $\delta > 0$ talque
$$d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon \quad \text{si } d(x,y) < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $f_n$ es continua en $K$ y $K$ es compacto, entonces $f_n$ es uniformemente continua en $K$. Es decir, $\exists\, \delta_n > 0$ tal que
$$\text{si } d(x,y) < \delta_n \quad \text{entonces } d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon.$$

Como $(f_n)_n$ converge uniformemente y cada $f_n$ es continua, entonces el límite, digamos $f$, es continuo en $K$ y $\therefore$ uniformemente contino. Es decir, $\exists\, \delta_f > 0$ tal que
$$\text{si } d(x,y) < \delta_f \quad \text{entonces } d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Por la convergencia uniforme de $(f_n)_n$, $\exists\, N > 0$ talque
$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{si } n \geq N \quad \forall x \in K.$$

Ahora,

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq d(f_n(x), f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), f_n(y))$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$
$$\underline{\text{si}} \quad n \geq N \quad \text{y} \quad d(x,y) < \delta_f$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1}, \delta_f\}$.

Entonces se tiene que

$$d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{si} \quad d(x,y) < \delta$$

que es lo que se quería demostrar. ■

## Teorema de Arzela-Ascoli.

Sea $K \subseteq (X,d)$ compacto. $\mathcal{F} \subseteq C_{\mathbb{R}}(K)$ es compacto si y solo si $\mathcal{F}$ es cerrado, acotado y uniformemente equicontinuo.

**Dem.** Supongamos primero que $\mathcal{F}$ es compacto, solo resta ver entonces que $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

Sea $\varepsilon > 0$ p.d. $\exists\, \delta > 0$ talque $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $d(x,y) < \delta$ $\forall f \in \mathcal{F}$, $x,y \in K$.
Como $\mathcal{F}$ es compacto es totalmente acotado y por tanto existen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(f_i).$$

La familia $\{f_i : 1 \leq i \leq n\}$ es uniformemente equicontinua y por tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad d(x,y) < \delta \quad \forall\, 1 \leq i \leq n,\ x,y \in K.$$

Sea $f \in \mathcal{F}$, existe $1 \leq i_0 \leq n$ talque $\|f - f_{i_0}\|_\infty < \varepsilon$ y por tanto

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + |f_{i_0}(y) - f(y)|$$
$$< 3\varepsilon \quad \text{si} \quad d(x,y) < \delta \quad \checkmark.$$

Conversamente, supongamos que $\mathcal{F}$ es cerrado, acotado y uniformemente equicontinuo p.d. $\mathcal{F}$ es compacto.

Como $\mathcal{F}$ es cerrado en $C_{\mathbb{R}}(K)$ y $C_{\mathbb{R}}(K)$ es completo, entonces $\mathcal{F}$ es completo. Así, para ver que $\mathcal{F}$ es compacto lo único que nos falta ver es que es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon > 0$ p.d. existe una $\varepsilon$-red finita de $\mathcal{F}$.

Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $d(x,y) < \delta$ $\forall f \in \mathcal{F}$, $x,y \in K$ ya que $\mathcal{F}$ es unif. equicontinua.

Como $K$ es compacto, entonces $K$ es totalmente acotado. Por tanto, existen $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\delta(x_i).$$

Consideremos ahora la siguiente función:

$$C_{\mathbb{R}}(K) \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}^n$$
$$f \longmapsto (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)).$$

Afirmamos que $\delta(\mathcal{F}) = \{\delta(f) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado. Sabemos que $\mathcal{F}$ es acotada en $C_{\mathbb{R}}(K)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M$ $\forall f \in \mathcal{F}$.

Por tanto $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in K, f \in \mathcal{F}$.

Ahora $\|(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))\|_n \leq |f(x_1)| + |f(x_2)| + \dots + |f(x_n)|$
$\leq nM$ $\forall f \in \mathcal{F}$.

Por tanto $\delta(\mathcal{F})$ es acotado, y como es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ también es totalmente acotado.

Así, existen $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{F}$ tales que

$$\delta(\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B_\varepsilon(\delta(f_i)).$$

Afirmamos que $f_1, \dots, f_r$ es una $3\varepsilon$-red finita de $\mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{F}$, p.d. existe $1 \le j \le r$ tal que $\|f - f_j\|_\infty < 3\varepsilon$.
sea $x \in K$:

- $\delta(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ y existe $j$ tal que $\|\delta(f) - \delta(f_j)\|_n < \varepsilon$ (¿por qué?)
- $\exists\ x_i \in K$ tq $d(x, x_i) < \delta$ y como $\mathcal{F}$ es unif. equicontinua entonces $|g(x) - g(x_i)| < \varepsilon \ \forall g \in \mathcal{F}$

en particular para $f$.

- $|f(x_i) - f_j(x_i)| \le \|(f(x_1) - f_j(x_1), \dots, f(x_n) - f_j(x_n))\|_n < \varepsilon$

Juntando todo lo anterior:

$$|f(x) - f_j(x)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_j(x_i)| + |f_j(x_i) - f_j(x)|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \qquad \forall\ x \in K$$

Es decir, $\|f - f_j\|_\infty < 3\varepsilon$ ■