NO
DATE 27 . 03 . 20

Análisis Matemático I

En lo que sigue (X,d) es un espacio métrico.

Notación: Si $r \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$, $B_r(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$

$B_r[x_0] = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$.

Def. Sea $A \subseteq X$, se dice que A es acotado si existen $x_0 \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ talesque $A \subseteq B_r[x_0]$.

Prop. Si $(V, \| \ \|)$ es un espacio normado, entonces $A \subseteq V$ es acotado si y solo si $\exists\, r > 0$ tal que $A \subseteq B_r[0]$.

Dem. Ejercicio.

Def. Sea $A \subseteq X$, definimos el diámetro de A como $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a,b) : a,b \in A\}$.

Prop. $A \subseteq X$ es acotado $\Leftrightarrow$ $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Dem. Supongamos primero que A es acotado, eso significa que existen $x_0 \in X$ y $r > 0$ tq

$A \subseteq B_r[x_0]$.

Ahora, si $a, b \in A$, entonces $d(a,x_0) \leq r$ y $d(b,x_0) \leq r$,

por tanto $d(a,b) \leq d(a,x_0) + d(b,x_0) \leq 2r$

y así $\sup\limits_{a,b \in A} d(a,b) \leq 2r$, es decir

el diámetro de A es finito.

Ahora supongamos que $\text{diam}(A) < \infty$. Si $\text{diam}(A) = 0$ entonces se sigue el resultado, si $\text{diam}(A) > 0$ entonces consideremos $B_{\text{diam}(A)}[a]$ para alguna $a \in A$.

Sea $b \in A$, $d(b, a) \leq \text{diam}(A)$ y por tanto

$$b \in B_{\text{diam}(A)}[a].$$

Se sigue que $A \subseteq B_{\text{diam}(A)}[a]$ y por tanto

A es acotado $\blacksquare$

Las definiciones de límite y convergencia se trasladan fácilmente a espacios métricos.

Def. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en (X,d). Se dice que $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ si $n, m \geq N$.

Def. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en (X, d). Se dice que $(x_n)_n$ converge a $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ si $n \geq N$.

Nota: Esta definición es equivalente a decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tq $x_n \in B_\varepsilon(x)$ si $n \geq N$. (Escriban la demostración).

Prop. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en (X,d). Si existe $x_0 \in X$ tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, entonces $(x_n)_n$ es de Cauchy.

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N$ por def. de convergencia. Luego $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \varepsilon$ si $n, m \geq N$ $\blacksquare$

Ya sabíamos, desde los ejemplos manejados en clase, que una sucesión de Cauchy no necesariamente converge. ¿Recuerdan alguno?

Una definición muy importante es la siguiente:

Def. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que (X,d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X.

Ej. $(\mathbb{R}, |\ |)$ es completo.

Evidentemente esta definición es importante porque no todo espacio métrico es completo, en esa dirección vamos.

Prop. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en (X,d), entonces $(x_n)_n$ es acotada.

Dem. Consideremos $\varepsilon = 1$, existe $N > 0$ tal que

$d(x_n, x_m) < 1$ si $n, m \geq N$ y por tanto

$d(x_n, x_N) < 1$ si $n \geq N$.

Consideremos ahora

$$\max\{d(x_1,x_N), d(x_2,x_N), \dots, d(x_{N-1},x_N), 1\} = R.$$

Se sigue que $x_n \in B_R[x_N]$ $\forall n$ ∎

Prop. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en (X,d). Si $(x_n)_n$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que converge a un punto $x_0 \in X$, entonces $(x_n)_n \longrightarrow x_0$.

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N_0 > 0$ tal que

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n_k \geq N_0 .$$

También existe $N_1 > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n,m \geq N_1$.

Sea $N = \max\{N_0, N_1\}$, entonces:

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{si} \quad n_k \geq N \blacksquare$$

Ejercicios: Supongamos para los siguientes 4 ejercicios que estamos en un espacio normado $(X, \| \ \|)$ y que $(x_n)_n \longrightarrow x_0 \in X$, $(y_n)_n \longrightarrow y_0 \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $(x_n \pm y_n)_n \longrightarrow x_0 \pm y_0$.

2. $(\lambda x_n)_n \longrightarrow \lambda x_0$.

3. $(\|x_n\|)_n \longrightarrow \|x_0\|$

4. Si el espacio es $\mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{y_n}\right)_n \longrightarrow \frac{1}{y_0}$ si $y_0 \neq 0$.

—.

Recuerden que el espacio $(\ell^\infty, \| \ \|_\infty)$ es un espacio normado:

$$\ell^\infty = \{(x_n)_n : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } \exists M > 0 \text{ tq } |x_n| \leq M \ \forall n\}$$

$$\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n \{|x_n|\} .$$

Este espacio es completo.