Análisis Matemático I

Sabemos que c_0 es el subespacio de $(\ell^\infty, \| \ \|_\infty)$ formado por las sucesiones que convergen a cero. Consideremos ahora el subconjunto de c_0 formado por las sucesiones $(x_n)_n$ para las cuales existe $N>0$ tq $x_n = 0$ si $n \geq N$.

Denotaremos a este espacio por c_{00}.

Prop. $(c_{00}, \| \ \|_\infty)$ no es completo.

Dem. Consideremos la siguiente sucesión en c_{00}:

$$\bar{x}_1 = (1,0,0,0,\dots)$$
$$\bar{x}_2 = (1,1/2,0,0,\dots)$$
$$\bar{x}_3 = (1,1/2,1/3,0,\dots)$$
$$\vdots$$
$$(\bar{x}_n) = (1, 1/2, \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$$

El límite de esta sucesión <u>no</u> está en c_{00} ∎

Def. Se dice que $\varphi : (X,d) \to (X,d)$ es una contracción si existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que

$$d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq \alpha\, d(x_1, x_2)$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$.

Teorema del punto fijo de Banach. Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $\varphi : (X,d) \to (X,d)$ una contracción. Entonces φ tiene un único punto fijo. Es decir, existe $x \in X$ tal que $\varphi(x) = x$ y este x es único.

Dem. Sea $x_0 \in X$ y

sean
$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0) \\ x_2 &= \varphi(x_1) = \varphi(\varphi(x_0)) \\ x_3 &= \varphi(x_2) = \varphi(\varphi(\varphi(x_0))) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi^{(n)}(x_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Afirmamos que esta sucesión es de Cauchy.

Como φ es una contracción sabemos que existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) = d(\varphi(\varphi(x_0)), \varphi(x_0)) &\leq \alpha\, d(\varphi(x_0), x_0) \\ &= \alpha\, d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_3, x_2) = d(\varphi(x_2), \varphi(x_1)) &\leq \alpha\, d(x_2, x_1) \\ &\leq \alpha^2 d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$$d(x_4, x_3) \leq \alpha^3 d(x_1, x_0)$$
$$\vdots$$
$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \quad \text{etc.}$$

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, ahora tenemos que

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n)$$

$$\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\leq \alpha^{m-1} d(x_1, x_0) + \alpha^{m-2} d(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^n d(x_1, x_0)$$

$$= (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^n) \, d(x_1, x_0)$$

$$= \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1 - \alpha} \, d(x_1, x_0)$$

Como $\alpha < 1$ se sigue que $(x_n)_n$ es de Cauchy
(¿por qué?)

Como $(x_n)_n$ es de Cauchy en un espacio completo, se sigue que converge.

Sea $z = \lim_{n \to \infty} x_n$.

p.d. $\varphi(z) = z$

Como φ es continua (¿por qué?)

$$\varphi(z) = \lim_{n \to \infty} \varphi(x_n)$$

y $\therefore$ $\varphi(z) = \lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n = z$.

Veamos ahora que z es único:
Supongamos que existe $z_1 \in X$ tq $\varphi(z_1) = z_1$.

$$d(z, z_1) = d(\varphi(z), \varphi(z_1)) \leq \alpha \underbrace{d(z, z_1)}_{\neq 0 \text{ si } z \neq z_1}$$

$\therefore$ $1 = \dfrac{d(z, z_1)}{d(z, z_1)} \leq \alpha$ pero $0 \leq \alpha < 1$!