NO.
DATE 08 04 20

Análisis Matemático I

Nociones básicas de topología en espacios métricos

Def. Sea X un conjunto, se dice que una familia τ de subconjuntos de X forman una topología para X si:

1. $X, \emptyset \in \tau$.
2. Si $U, V \in \tau$ entonces $U \cap V \in \tau$.
3. Si $U_\alpha \in \tau$, con $\alpha \in A$ un conjunto de índices, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

(X, τ) es llamado un espacio topológico y los elementos de τ suelen ser llamados abiertos.

A nosotros nos interesa trabajar en el contexto de espacios métricos y ahí tenemos la siguiente definición:

Def. Sea (X,d) un espacio métrico. $U \subseteq X$ es llamado abierto si para cada $x_0 \in U$ existe $r>0$ tal que $B_r(x_0) \subseteq U$.

Prop. Sea (X,d) un espacio métrico, $a \in X$ y $R>0$. $B_R(a)$ es abierto.

Dem. Sea $x_0 \in B_R(a)$, entonces $d(a,x_0) < R$ y $0 < R - d(a,x_0)$.

Consideremos ahora $B_{R-d(a,x_0)}(x_0) = \{y \in X : d(y,x_0) < R - d(a,x_0)\}$.

Sea $y \in B_{R-d(a,x_0)}(x_0)$ p.d. $y \in B_R(a)$.

Es decir, p.d. $d(y,a) < R$.

$$d(y,a) \leq d(y,x_0) + d(x_0,a) < R - d(a,x_0) + d(a,x_0) = R \quad \blacksquare$$

LOOSE LEAF L1100 7mm X 27lines maruman

Def. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $x_0 \in X$. $V \subseteq X$ es una vecindad de x_0 si existe un abierto U tal que $x_0 \in U \subseteq V$.

Def. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Se dice que $a \in X$ es un punto interior de A si existe una vecindad V tal que $a \in V \subseteq A$.

El conjunto de puntos interiores de A se denota por A° o $\mathrm{Int}(A)$.

Obs. Si a es punto interior de A, entonces $\exists\, r>0$, U abierto y V vecindad tq

$$a \in B_r(a) \subseteq U \subseteq V \subseteq A.$$

Def. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $D \subseteq X$. Se dice que D es denso en X si $U \cap D \neq \emptyset$ para todo abierto en U distinto del vacío.

Def. Sea (X,d) un espacio métrico. Sea dice que (X,d) es separable si X tiene un subconjunto denso numerable.

Ejemplos 1. $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$, $\therefore$ $\mathbb{R}^n$ es separable.

2. $c_0 = \{(x_n)_n : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } (x_n)_n \to 0\}$ es separable.

Dem. Consideremos

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= (1,0,0,\dots) \\ \bar{e}_2 &= (0,1,0,\dots) \\ &\vdots \\ \bar{e}_n &= (0,0,\dots,0,\underset{\text{lugar "n"}}{1},0,\dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

en c_0.

Sea $A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{e}_i : \lambda_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Sea $\bar{\alpha} \in c_0$, p.d. existen $\bar{x} \in A$ $\nearrow$ y $\varepsilon > 0$ talque $\bar{x} \in B_\varepsilon(\bar{\alpha})$.

Sea $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\bar{\alpha}) = \{\bar{x} \in c_0 : \|\bar{x} - \bar{\alpha}\|_\infty < \varepsilon\}$
$= \{x \in c_0 : \sup_{i \geq 1} |x_i - \alpha_i| < \varepsilon\}$.

Existe $N > 0$ talque $|\alpha_i| < \frac{1}{2}\varepsilon$ si $i \geq N$
(¿por qué?)

Sea $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, 0, 0, 0 \dots)$.

Claramente $\bar{x} \in A$ y

$$\|\bar{x} - \bar{\alpha}\|_\infty = \sup\{0, 0, \dots, 0, |\alpha_{N+1}|, |\alpha_{N+2}|, \dots\}$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$

$\therefore$ $\bar{x} \in B_\varepsilon(\bar{\alpha})$

Es decir A es denso en c_0.

Consideremos ahora al conjunto

$$A(\mathbb{Q}) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i \bar{e}_i : r_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$$

p.d. $B_\varepsilon(\bar{\alpha}) \cap A(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

Existe $\bar{x} \in A$ tal que $\bar{x} \in B_\varepsilon(\bar{\alpha})$

p.d. $\exists$ $\bar{y} \in A(\mathbb{Q})$ tq $\|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon$.

$\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, 0, 0, 0 \dots)$

Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existen $r_1, \dots, r_N \in \mathbb{Q}$ tq $|\alpha_i - r_i| < \varepsilon$.

Sea $y = (r_1, r_2, \dots, r_N, 0, 0, \dots)$

Entonces $\|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty = \sup_i \{|\alpha_i - r_i|\} \leq \varepsilon$

y entonces $\|\bar{y} - \bar{\alpha}\|_\infty \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty + \|\bar{x} - \bar{\alpha}\|_\infty$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\therefore$ $A(\mathbb{Q})$ es denso en c_0 y claramente es numerable (¿por qué?).

$\therefore$ c_0 es separable $\blacksquare$

Ejercicio. Demuestre que el espacio $(c, \|\ \|_\infty)$ es separable.