DATE 15.04.20

Análisis Matemático

Teo. $(\ell^\infty, \| \|_\infty)$ es no separable.

Dem. p.d. si $A \subseteq \ell^\infty$ es denso, entonces A es no numerable.

Sea $U = \{ (a_i)_i : a_i \in \{0,1\} \}$, sabemos que

$U \sim \mathbb{R}$, es decir, U es no numerable.

Sea A denso en ℓ^∞

Veamos que existe $f: U \longrightarrow A$ inyectiva:

sean $x, y \in U$, se cumple que $B_{\frac{1}{2}}(x) \cap B_{\frac{1}{2}}(y) = \emptyset$

si no fuera este el caso podríamos tomar

$z \in B_{\frac{1}{2}}(x) \cap B_{\frac{1}{2}}(y)$ y entonces

$1 = \| x - y \|_\infty \leq \|x - z\|_\infty + \|z - y\|_\infty < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

es decir $1 < 1$, pero esto es una contradicción.

$\therefore \; B_{\frac{1}{2}}(x) \cap B_{\frac{1}{2}}(y) = \emptyset$.

Ahora, para cada $x \in U$, sea $f(x) \in \underbrace{B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A}_{\text{como } A \text{ es denso en } \ell^\infty \text{, esta intersección es no vacía.}}$.

Por lo ya demostrado si $x \neq y$

entonces $f(x) \neq f(y)$

Es decir, f es inyectiva y $\therefore$

A es no numerable ∎

Sea (X, d) separable y sea $A \subseteq X$ denso y numerable, denotaremos por $\mathcal{B} = \{ B_r(a) : a \in A, r \in \mathbb{Q}^+ \}$.

$\mathcal{B} \sim A \times \mathbb{Q}^+$ que es numerable.

Lema. Sea (X,d) separable y $A \subseteq X$ denso y numerable. Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces existen $r \in \mathbb{Q}^+$ y $a \in A$ tales que $x_0 \in B_r(a) \subseteq B_\varepsilon(x_0)$.

Dem. Sea $r \in \mathbb{Q}^+$ talque $0 < r < \frac{\varepsilon}{2}$

y sea $a \in \underbrace{B_r(x_0) \cap A}_{\text{esta intersección es no vacía}}$. ¿por qué?

Así, $d(a, x_0) < r$.

Veamos ahora que $x_0 \in B_r(a) \subseteq B_\varepsilon(x_0)$.

- Claramente $x_0 \in B_r(a)$.
- Sea $y \in B_r(a)$, entonces $d(y,a) < r$,

$$d(y, x_0) \leq d(y,a) + d(a, x_0) < r + r < \varepsilon$$

$$\therefore \; y \in B_\varepsilon(x_0) \; \blacksquare$$

Teo. Sea (X,d) separable y $A \subseteq X$ denso y numerable. Entonces para cada conjunto abierto U en X existe

$$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} = \{ B_r(a) : a \in A, r \in \mathbb{Q}^+ \}$$

tal que $U = \bigcup_{\$ \in \mathcal{B}'} \$$.

Dem. Sea $U \subseteq X$ abierto, $U \neq \emptyset$.

Sea $x_0 \in U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x_0) \subseteq U.$$

Por el lema existen $a_{x_0} \in A$ y $r_{x_0} \in \mathbb{Q}^+$ tales que

$$x_0 \in B_{r_{x_0}}(a_{x_0}) \subseteq B_\varepsilon(x_0) \subseteq U.$$

Así,
$$U \subseteq \bigcup_{x_0 \in U} B_{r_{x_0}}(a_{x_0}) \subseteq U$$

$$\therefore \; U = \bigcup_{x_0 \in U} B_{r_{x_0}}(a_{x_0})$$

y $\mathcal{B}' = \{ B_{r_{x_0}}(a_{x_0}) : x_0 \in U \}$ ■