NO.
DATE 17 04 20

Análisis Matemático I

Prop. En $\mathbb{R}$, cualquier abierto no vacío U es tal que existe una familia $\mathcal{F}$ numerable de intervalos abiertos ajenos entre sí tal que $U = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I$.

Dem. Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto y no vacío, y sea $x_0 \in U$.

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $x_0 \in (a,b) \subseteq U$.

Ahora, sean $a_{x_0} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : (\alpha, x_0] \subseteq U\}$

$b_{x_0} = \sup\{\beta \in \mathbb{R} : [x_0, \beta) \subseteq U\}$.

Se tiene que $x_0 \in (a_{x_0}, b_{x_0})$.

¿$a_{x_0} \in U$? si sí, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$(a_{x_0} - \delta, a_{x_0} + \delta) \subseteq U$ porque U es abierto

y entonces $(a_{x_0} - \delta, x_0) \subseteq U$

pero esto contradice la definición de a_{x_0}

$\therefore$ $a_{x_0} \notin U$.

Y lo mismo pasa con b_{x_0}.

Ahora si $x_0, y_0 \in U$ y $x_0 \neq y_0$ entonces

si $(a_{x_0}, b_{x_0}) \cap (a_{y_0}, b_{y_0}) \neq \emptyset$ entonces

$(a_{x_0}, b_{x_0}) = (a_{y_0}, b_{y_0})$:

al tomar $x \in (a_{x_0}, b_{x_0}) \cap (a_{y_0}, b_{y_0})$
se tendría que $a_{x_0} < x < b_{x_0}$ y $a_{y_0} < x < b_{y_0}$

Como $a_{x_0} \notin U$ $a_{x_0} \leq a_{y_0}$ y como

$a_{y_0} \notin U$ entonces $a_{y_0} \leq a_{x_0}$. Y análogamente para b_{x_0} y b_{y_0}.

Ahora, sea $F = \{ \underbrace{(a_{x_0}, b_{x_0})}_{= I_{x_0}} : x_0 \in U \}$

$$U = \bigcup_{I_{x_0} \in F} I_{x_0} .$$

Veamos que F es numerable:

Sea $r_I \in I \cap \mathbb{Q}$ con $I \in F$.

Es decir a cada intervalo I en F le asociamos un racional en el intervalo.

Esta función es inyectiva (¿por qué?) ∎

Teorema de Lindelöf. Sea (X, d) separable y $A \subseteq X$ un conjunto denso y numerable. Sea F una familia de abiertos cuya unión contiene a A, entonces F contiene una subfamilia numerable cuya unión contiene a A.

Dem. Sea $F = \{ U_\alpha : U_\alpha \text{ es abierto y } A \subseteq \bigcup U_\alpha \}$.

Sea $\mathcal{B}' = \{ B \in \mathcal{B} : B \subseteq U_\alpha \text{ p. a. } U_\alpha \in F \}$.

$\mathcal{B}'$ es numerable y $\therefore$ $\mathcal{B}' = \{ B_i : i \in \mathbb{N} \}$.

Para cada B_i escogemos $U_i \in F$ tal que $B_i \subseteq U_i$.

Sea ahora $\mathcal{F}' = \{U_i\}_i$

p.d. $A \subseteq \bigcup_i U_i$

Sabemos que $A \subseteq \bigcup_{U_\alpha \in \mathcal{F}} U_\alpha$

sea $a \in A$, $a \in U$ para alguna $U_\alpha \in \mathcal{F}$

$\therefore \exists \ B \in \mathcal{B}'$ talque $a \in B \subseteq U$

es alguna de las B_i

$\therefore \ a \in B_i \subseteq U_i$

y $\therefore \ A \subseteq \bigcup_i U_i$ ■