NO

DATE 20 04 20

Análisis Matemático I

Def. Sean $A \subseteq (X,d)$ y $x_0 \in X$. Se dice que x_0 es un punto de contacto de A (o que está en la cerradura de A) si $B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.

$\overline{A} = \{x \in X : x$ es punto de contacto de $A\}$.

El conjunto $\overline{A}$ es llamado la cerradura de A (en X).

Nota. Un conjunto $D \subseteq X$ es denso en X si $B_\varepsilon(x_0) \cap D \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$. Es decir, todo punto x_0 en X es un punto de contacto de D.

Es decir, $\overline{D} = X$.

Prop. Sean $A, B \subseteq (X,d)$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq \overline{A}$
2. $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$
3. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Dem. 1. Se sigue de la definición ✓

2. por 1, $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$ p.d. $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$:

sea $x_0 \in \overline{\overline{A}}$ p.d. $B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$.

Por definición $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \cap \overline{A} \neq \emptyset$

$\therefore \exists\, a \in \overline{A}$ tal que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$,

como $a \in \overline{A}$, entonces $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap A \neq \emptyset$

$\therefore \exists\, a' \in A$ tal que $a' \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$, es decir,

$d(a', x_0) \leq d(a, a') + d(a, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\therefore a' \in A$ y $a' \in B_\varepsilon(x_0)$ ✓

3. Si suponemos 5 esta demostración es trivial:

$$A \cap B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \qquad \therefore \ \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \ \checkmark$$
$$y \ A \cap B \subseteq B \qquad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$$

5. Sea $x_0 \in \overline{A}$ p.d. $x_0 \in \overline{B}$

$$\emptyset \neq B_\varepsilon(x_0) \cap A \subseteq B_\varepsilon(x_0) \cap B$$

$$\therefore \ B_\varepsilon(x_0) \cap B \neq \emptyset.$$

Es decir $x_0 \in \overline{B}$ ✓

4. $$A \subseteq A \cup B \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \qquad \therefore \ \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$
$$B \subseteq A \cup B \qquad \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

Demostremos ahora que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$:

Sea $x_0 \in \overline{A \cup B}$, entonces $B_\varepsilon(x_0) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0$

$$\therefore [B_\varepsilon(x_0) \cap A] \cup [B_\varepsilon(x_0) \cap B] \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0.$$

- Si $x_0 \in \overline{A}$ entonces el resultado se sigue.
- si no, $x_0 \notin \overline{A}$, es decir, $\exists \ \delta > 0$ tal que

$$B_\delta(x_0) \cap A = \emptyset \qquad \text{p.d. } x_0 \in \overline{B}.$$

$$[B_\varepsilon(x_0) \cap B_\delta(x_0)] \cap (A \cup B) \neq \emptyset \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$[B_\varepsilon(x_0) \cap B_\delta(x_0)] \cap B \neq \emptyset$ porque

$$[B_\varepsilon(x_0) \cap B_\delta(x_0)] \cap A = \emptyset$$

$$\therefore \ \emptyset \neq B_\varepsilon(x_0) \cap B_\delta(x_0)$$

$$\therefore \ B_\varepsilon(x_0) \cap B \neq \emptyset \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \blacksquare$$

Def. Sea $A \subseteq (X,d)$. Se dice que A es cerrado si $A = \overline{A}$.

Obs. $X = \overline{X}$ $\therefore$ el espacio total siempre es cerrado.
$\emptyset$ es cerrado
$\overline{A}$ es cerrado $\forall\, A \subseteq X$

Prop Sea $x_0 \in (X, d)$ y $r > 0$. Entonces

$$\mathcal{B}_r[x_0] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} \text{ es cerrado.}$$

Dem. 1. $B_r[x_0] \subseteq \overline{B_r[x_0]}$
2. p.d. $\overline{B_r[x_0]} \subseteq B_r[x_0]$

Sea $y \in \overline{B_r[x_0]}$.

Para cada $\varepsilon > 0$ $\exists\, z \in B_r[x_0]$ talque $d(z,y) < \varepsilon$.

$d(y, x_0) \leq d(y,z) + d(z, x_0) < \varepsilon + d(z, x_0)$
y esto se cumple para toda ε,

en particular podemos escoger $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ $d(y, x_0) < \frac{1}{n} + d(z, x_0)$ $\forall n$

$d(y, x_0) < \frac{1}{n} + r$

$\therefore$ $d(y, x_0) \leq r$ ■

Obs. $\overline{B_r(x_0)} \subseteq B_r[x_0]$ pero puede ocurrir que no sean iguales:

Consideremos $\mathbb{R}$ con la métrica discreta

$\overline{B_1(0)} = \{0\}$ pero $B_1[0] = \mathbb{R}$.

(en un espacio normado sí se cumple que $\overline{B_r(x_0)} = B_r[x_0]$)