NO

DATE 22.04.20

Análisis Matemático I

Teo. Sea $U \subseteq (X,d)$. U es abierto si y solo si $X \setminus U$ es cerrado.

Dem. $\Rightarrow$] Supongamos que U es abierto

p.d. $\overline{X \setminus U} = X \setminus U$

Como $X \setminus U \subseteq \overline{X \setminus U}$ basta ver que $\overline{X \setminus U} \subseteq X \setminus U$.

Sea $x_0 \in \overline{X \setminus U}$, entonces $B_\varepsilon(x_0) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$

$\therefore$ $B_\varepsilon(x_0) \nsubseteq U$ $\forall \varepsilon > 0$

Y se sigue que $x_0 \notin U$, ie, $x_0 \in X \setminus U$.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que $X \setminus U$ es cerrado

p.d. U es abierto.

Sea $x_0 \in U$, entonces $x_0 \notin X \setminus U = \overline{X \setminus U}$.

Portanto, $\exists$ $\varepsilon > 0$ talque $B_\varepsilon(x_0) \cap (X - U) = \emptyset$

es decir, $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ ∎

Teo. $A \subseteq (X,d)$ es cerrado si y solo si toda sucesión en A que converja lo hace a un punto de A.

Dem. Sea $A \subseteq X$, basta ver que

$$\overline{A} = \{x_0 \in X : x_0 = \lim_{n \to \infty} a_n \text{ para alguna sucesión } (a_n)_n \text{ en } A\}.$$

Veamos que $\{x_0 \in X : x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ p.a. suc. } (a_n)_n \text{ en } A\} \subseteq \overline{A}$:

Sea $x_0 \in \nearrow$, p.d. $x_0 \in \overline{A}$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in B_\varepsilon(x_0)$ si $n \geq N$, es decir, $B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$ ✓.

Ahora veamos que $\overline{A} \subseteq \{x_0 \in X : x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$ p.a. suc. $(a_n)_n$ en $A\}$.

Sea $x_0 \in \overline{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in A$ tal que $d(a_n, x_0) < \frac{1}{n}$,

así tenemos que $0 \leq d(a_n, x_0) \leq \frac{1}{n}$ $\forall n$

$\therefore (a_n)_n \longrightarrow x_0$ ■

Obs. Sabemos ahora que si $A \subseteq (X,d)$, entonces

x es punto de contacto de A $\iff B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$
$\iff d(x, A) = 0$
$\iff$ Existe $(a_n)_n$ en A tal que $(a_n) \longrightarrow x$.

Prop. Sea (X,d) un espacio métrico.
1. X, $\emptyset$ son cerrados.
2. Si F_1, F_2 son cerrados entonces $F_1 \cup F_2$ es cerrado.
3. Si $\mathcal{F}$ es una familia arbitraria de cerrados entonces $\bigcap_{F_\alpha \in \mathcal{F}} F_\alpha$ es cerrado.

Dem. 2. $X \setminus (F_1 \cup F_2) = \underbrace{(X \setminus F_1)}_{\text{abierto}} \cap \underbrace{(X \setminus F_2)}_{\text{abierto}}$ ✓.

3. $X \setminus \left(\bigcap_{F_\alpha \in \mathcal{F}} F_\alpha\right) = \bigcup_{F_\alpha \in \mathcal{F}} (X \setminus F_\alpha)$ ✓

Nota: El conjunto de Cantor es cerrado.

Def. Sea $A \subseteq (X, d)$. Se dice que $x_0 \in X$ es punto de acumulación de A si $(B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ $\forall\ \varepsilon > 0$.

Denotamos por $A' = \{x \in X : x$ es punto de acumulación de $A\}$

Obs. $A' \subseteq \overline{A}$.

Prop. Sea $A \subseteq (X, d)$, entonces $\overline{A} = A \cup A'$.

Dem. Como $A' \subseteq \overline{A}$ y $A \subseteq \overline{A}$, se sigue que $A' \cup A \subseteq \overline{A}$.

Para demostrar la contención contraria sea $x_0 \in \overline{A}$. Si $x_0 \in A$ entonces se sigue el resultado, si no:

sabemos que $B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$
y como $x_0 \notin A$ entonces
$(B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$

y por tanto $x_0 \in A'$ ∎

Ejercicio Demuestre que A es abierto si y solo si $A = A^\circ$.

Def. Sean $A \subseteq (X, d)$ y $x_0 \in X$. Se dice que x_0 es un punto de la frontera de A si $B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\varepsilon(x_0) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ $\forall\ \varepsilon > 0$.

Es decir, si $x_0 \in \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

$$\partial(A) = \{x \in X : x \text{ es punto de la frontera de } A\}$$

$$= \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}.$$