Tarea 1

Entrega: 6 de marzo de 2020.

1. Sean X y Y dos conjuntos y $f : X \to Y$ una función, sea también I un conjunto no vacío y para cada $i \in I$ sean $A_i \subseteq X$ y $B_i \subseteq Y$. Recuerde que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$:

   $f(A) = \{y \in Y : y = f(a) \text{ para alguna } a \in A\}$ y $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

   Pruebe las siguientes afirmaciones:

   (a) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

   (b) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. Mediante un ejemplo demuestre que la contención contraria no se tiene en general.

   (c) $f(A_n) \setminus f(A_m) \subseteq f(A_n \setminus A_m)$ donde $n, m \in I$. Mediante un ejemplo demuestre que la contención contraria no se tiene en general.

   (d) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

   (e) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

   (f) Sean B_1 y B_2 dos subconjuntos de Y. Entonces $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$

   (g) Si f es inyectiva entonces se tienen igualdades en los incisos (b) y (c).

2. Sean a, b, c y d números racionales con $c \neq 0$ y sea x un irracional. Pruebe que $\frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $ad - bc = 0$.

3. Existencia de la raíz enésima. Sean a un número real no negativo y $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que existe un único real no negativo que es la solución de la ecuación $x^n = a$. Tal número es denotado por $\sqrt[n]{a}$ o $a^{\frac{1}{n}}$ y es llamado la raíz enésima (no negativa) de a.

   El resultado es obvio si $a = 0$, por tanto suponga que $a > 0$. Sugerencia:

   (a) Para la unicidad pruebe que si b y c son reales no negativos y $m \in \mathbb{N}$, entonces $b^m < c^m \Leftrightarrow b < c$.

   Para la existencia recuerde que si $b > -1$ y $m \in \mathbb{N}$ entonces se satisface la desigualdad de Bernoulli: $(1+b)^m \geq 1 + mb$ y pruebe los siguientes resultados:

   (b) Si $0 < b < 1$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces $(1+b)^m < 1 + 3^m b$.

   (c) i. Si $0 < b < 1$, entonces $b^m < b$ para toda $m \in \mathbb{N}$.
   ii. Si $1 < b$, entonces $b^m > b$ para toda $m \in \mathbb{N}$.

   (d) Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x^n < a\}$. Entonces
   i. $\frac{a}{1+a} \in A$,
   ii. $1 + a$ es cota superior de A,
   iii. si $x \notin A$ y $0 < x \leq y$, entonces $y \notin A$.

(e) Sea $\alpha = \sup A$, entonces $\alpha > 0$ y $\alpha^n = a$. Para la prueba de la última afirmación justifique lo siguiente:

   i. Suponga que $\alpha^n < a$. Entonces existe $0 < b < 1$ tal que $\alpha^n(1 + 3^n b) < a$. Se sigue que $\alpha(1 + b) \in A$, lo que contradice que $\alpha = \sup A$.

   ii. Suponga que $\alpha^n > a$. Entonces existe $0 < b < 1$ tal que $\alpha^n(1 - nb) > a$. Se sigue así que $\alpha(1 - b) \notin A$ y claramente $0 < \alpha(1 - b) < \alpha$. Por tanto, $\alpha(1 - b) < y \leq \alpha$ implica $y \notin A$, lo que contradice que $\alpha = \sup A$.

4. Pruebe que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \notin \mathbb{Q}$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, demuestre que $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

6. Pruebe que el conjunto de todos los irracionales, denotado por $\mathbb{I}$, es denso en $\mathbb{R}$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Pruebe que el intervalo (a, b) es equipotente a $\mathbb{R}$.

8. Pruebe que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} - \{1, 2, \ldots, n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

9. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de números reales. Pruebe que

$$\inf_n \{a_n\} \leq \liminf_{n\to\infty} \{a_n\} \leq \limsup_{n\to\infty} \{a_n\} \leq \sup_n \{a_n\}.$$

10. Sean $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de números reales y $M = \limsup_{n\to\infty} \{b_n\}$.

   (a) Pruebe que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que $b_n < M + \varepsilon$ con excepción de a lo más una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ y que $M - \varepsilon < b_n$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Pruebe que si un número M' satisface que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que $b_n < M' + \varepsilon$ con excepción de a lo más una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ y que $M' - \varepsilon < b_n$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$, entonces $M = M'$.

11. Un número algebraico es un número real que es raíz de un polinomio con coeficientes racionales. Pruebe que el conjunto de números algebraicos es numerable.

12. Pruebe que $(0, 1)$ es equipotente con $(0, 1) \times (0, 1)$.