Tarea 2

1. En cada uno de los siguientes casos pruebe que la función propuesta d es una métrica en el conjunto indicado.

   (a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Definimos

   $$d(x,y) = \begin{cases} 1 + |y - x| & \text{si uno y sólo uno de los reales } x \text{ y } y \\ & \text{es estrictamente positivo} \\ |y - x| & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

   (b) La métrica del correo en $\mathbb{R}^2$: si $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ definimos

   $$d\left((x,y),(z,w)\right) = \begin{cases} \|(x,y)\|_2 + \|(z,w)\|_2 & \text{si } (x,y) \neq (z,w) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (z,w). \end{cases}$$

   (c) Sea $(V, \| \ \|)$ un espacio vectorial real y normado. Si $u, v \in V$ definimos $d(u,v) = \min\{1, \|v - u\|\}$.

2. Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que la función $\mathfrak{D}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ es una distancia en X.

3. Pruebe las siguientes desigualdades suponiendo que $\| \ \|$ es una norma en V y d es una distancia en X.

   (a) $\|u\| - \|v\| \leq |\|u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\| \leq \|u\| + \|v\|$ si $u, v \in V$.

   (b) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ si $x, y \in X$.

   (c) $|d(x,z) - d(y,w)| \leq d(x,y) + d(z,w)$ si $w, x, y, z \in X$.

   Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$ no vacíos.
   La distancia de $x_0 \in X$ a A se define de la siguiente manera: $d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, a) : a \in A\}$.
   La distancia de A a B se define de la siguiente manera: $d(A, B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

   (d) $d(x, A) \leq d(x,y) + d(y, A)$ si $x, y \in X$.

   (e) $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ si $x, y \in X$.

   (f) $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$ donde δ denota al diametro de un conjunto.

4. Sea $(V, \| \ \|)$ un espacio real normado.

   (a) Si V no es el espacio trivial entonces no es acotado.

   (b) A partir del inciso anterior explique la siguiente afirmación: Si en un espacio normado no trivial se define una distancia d según la cual el espacio resulta acotado, entonces esa distancia no puede estar inducida por una norma. Es decir, no existe una norma $\| \ \|$ en el espacio talque $d(x,y) = \|y - x\|$.

(c) ¿La distancia del ejercicio (1c) está inducida por una norma?

(d) ¿La distancia del ejercicio (2) está inducida por una norma?

5. Supongamos que $0 < x_1 < 1$ y sea $x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$. Pruebe que $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ es creciente y $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.

6. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d).

   (a) Pruebe que $d(x_n, x_{n+1}) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

   (b) ¿Es posible dar un ejemplo en $(\mathbb{R}, \| \, \|)$ de una sucesión que cumpla lo anterior y no sea de Cauchy? Justifique su respuesta.

7. Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ coverge si $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge.

8. Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones en $\mathbb{R}$. Pruebe que si $0 \leq x_n \leq y_n$ para toda n, y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.