Tarea 3

1. Pruebe que c_0 es un subconjunto cerrado de l_∞.

2. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Un punto $x_0 \in X$ es llamado de condensación de A si $B_r(x_0) \cap A$ es NO numerable para cada $r > 0$.

   Supongamos que X es separable y que A es no numerable. Pruebe los siguientes enunciados:

   (a) Hay un punto de condensación de A que pertenece a A.
   Sea B el conjunto de puntos de condensación de A.

   (b) $A \setminus B$ es numerable.

   (c) $A \cap B$ es no numerable.

   (d) B es cerrado.

   (e) B no tiene puntos aislados.
   Nota: Se dice que $x_0 \in B$ es un punto aislado de B si existe una bola abierta $B_r(x_0)$ tal que $B_r(x_0) \cap B = \{x_0\}$.

3. Sea $B \subset (X, d)$. Se dice que $x_0 \in B$ es un punto aislado de B si existe una bola abierta $B_r(x_0)$ tal que $B_r(x_0) \cap B = \{x_0\}$. Pruebe que si X es un espacio separable, entonces el conjunto de puntos aislados de B es numerable.

4. Un conjunto $P \subseteq (X, d)$ es llamado perfecto si es cerrado y no tiene puntos aislados; es decir si $P = P'$.

   Pruebe el Teorema de Cantor-Bendixon. Es decir, si $A \subseteq X$ es cerrado y no numerable y (X, d) es separable, entonces $A = B \cup N$ donde B es un conjunto perfecto y N es un conjunto numerable.

5. Pruebe que el conjunto de Cantor es perfecto.

6. Se dice que un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es relativamente compacto en X si $\overline{A}$ es compacto.

   Sean A, B, T subconjuntos de (X, d). Pruebe que

   (a) A es relativamente compacto si y sólo si toda sucesión en A tiene una subsucesión que converge a un punto de X.

   (b) Sea $M \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que M es relativamente compacto si y sólo si M es acotado.

7. Sea $T \subset (X, d)$. Pruebe las siguientes afirmaciones.

   (a) Si T es totalmente acotado entonces T es acotado.

(b) T es totalmente acotado $\iff$ para cada $\varepsilon > 0$ existe en T una ε-red finita para T (es decir, dado $\varepsilon > 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset T$ tales que $T \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(y_i)$).

(c) Todo subconjunto de un conjunto totalmente acotado es totalmente acotado.

(d) T es totalmente acotado $\iff \overline{T}$ es totalmente acotado.

(e) Si T es relativamente compacto entonces T es totalmente acotado.

8. Dé un ejemplo de un subconjunto cerrado y acotado de l_∞ que no sea totalmente acotado.

9. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no cerrado. Construya de manera explícita una cubierta abierta de A que no tenga una subcubierta finita.

10. Pruebe que $(C[a,b], \| \ \|_\infty)$ es completo y separable.