Tarea 4

1. (a) Sea $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}}$ para cada $n \in N$ y $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $f_n \to 0$ pero que la convergencia no es uniforme.

   (b) Sea $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ para cada $n \in N$ y $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que (g_n) converge puntualmente en $\mathbb{R}$. ¿Es uniforme la convergencia?

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Pruebe que si $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces (f_n) converge uniformemente a una función continua.

3. Sea $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Demuestre que $(f_n)_n$ converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$.

   (b) Demuestre que $(f'_n)_n$ no converge en ningún punto.

4. Para cada $x > 0$ definimos $f_1(x) = \sqrt{x}$ y $f_{n+1} = \sqrt{x + f_n(x)}$ para toda $n > 2$. Pruebe que:

   (a) $0 = f_n(0) < f_n(x) < f_{n+1}(x) < 1 + x$ para toda $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

   (b) (f_n) converge uniformemente en $[a, b]$ si $0 < a < b$, pero no en $[0, 1]$.

5. Sean f_n y f funciones reales para toda n y supongamos que f_n converge uniformemente a f en $S \subseteq (X, d)$. Pruebe que si existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para toda $x \in S$ y $n \in \mathbb{N}$ y $g : B_M[0] \to R$ es una función continua, entonces $g \circ f_n \longrightarrow g \circ f$ de manera uniforme en S.

6. Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que se puede aproximar uniformemente por polinomios en $\mathbb{R}$ entonces f es un polinomio.

7. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones uniformemente equicontinuas en un subconjunto cerrado y no vacío $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Supongamos que para cada $B \subset D$ no vacío existe M_B tal que $\|f\|_B \leq M_B$ para toda $f \in \mathcal{F}$ donde $\|f\|_B = \sup\{|f(x)| : x \in B\}$. Pruebe que cada sucesión (f_n) en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge en todo punto de D y que la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto K de D.

8. Sea $\mathcal{P}$ la familia de polinomios con coeficientes reales en una variable. Pruebe que toda función $f(x, y)$ real y continua en $[0, 1] \times [0, 1]$ es límite uniforme de funciones de la forma $p_1(x)q_1(y) + p_2(x)q_2(y) + \cdots + p_n(x)q_n(y)$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $p_i, q_i \in \mathcal{P}$ para $1 \leq i \leq n$.

9. Pruebe que las funciones $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\left(t + 4n^2\pi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ para $x \in [0, \infty)$ forman una familia equicontinua de funciones. Pruebe también que convergen puntualmente a 0 pero no uniformemente.

10. Pruebe que cada función real y continua definida en $[0, \pi]$ es el límite uniforme de funciones de la forma $a_0 + a_1 \cos(nx) + \cdots + a_n \cos(nx)$, donde $n \geq 0$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

11. Pruebe que la familia de funciones $(f_n)_n$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $f_n(x) = \arctan(nx)$ no es equicontinua en 0 .

12. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = f(nt)$. Si suponemos que $(f_n)_n$ es una familia equicontinua, ¿qué podemos concluir sobre f?

13. Sea F una familia de funciones reales derivables en un conjunto E y tales que existe $M > 0$ que cumple que $|f'(x)| < M$ para toda $x \in E$ y $f \in F$. Pruebe que F es equicontinua.

14. Pruebe que la familia $\{\text{sen}(nx) : n = 1, 2, \ldots\}$ no es equicontinua en $\mathbb{R}$.

15. Dé un ejemplo de un espacio métrico X y una sucesión de funciones definidas en X que sea equicontinua pero que no esté uniformemente acotada.