Derivados a Tiempo Discreto

F. Baltazar-Larios

3 de marzo de 2022

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos básicos

Definición 1.1. ***Activo financiero.*** *Es un contrato que otorga un derecho económico a quien lo posee, generando la corresponiente obligación por parte de quien lo expide de cumplir dicho contrato.*

Uno de los activos financieros más comunes son los **bonos**. Los bonos permiten al emisor la posibilidad de capitalizarse el día de hoy a cambio de una obliagación de pago a futuro a los inversionistas. Un bono que genera rédito económico durante la vigencia del contrato se dice que genera **dividendos**.

Otros activos financieros comunes en los mercason son **acciones, divisas, opciones, swaps**, entre otros.

Definición 1.2. ***Precio de un activo****. Consideremos el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in T})$. El precio de un activo, denotado por $\boldsymbol{S} = \{S_t\}_{t\in T}$ es un proceso estocástico*

$$\boldsymbol{S} : \Omega \times T \to \mathbb{R}^+,$$

adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$. El conjunto T puede ser de la forma: $\{0,1\}, \{0,1,\dots,T\}, [0,T]$.

Entonces el precio de un activo al tiempo t está denotado por S_t.

Es importante hacer una clasificación de los activos en función del riesgo implícito en ellos.

Definición 1.3. ***Activo libre de riesgo*** *es aquel en el que tenemos la certeza de su valor en un futuro. Por ejemplo:*

1. *Un déposito bancario.*
2. *Un bono emitido por el gobierno o alguna institución financiera.*

Definición 1.4. ***Activo riesgoso*** *es todo aquel activo cuyo precio futuro es desconocido o incierto. Por ejemplo:*

1. *Una acción*
2. *Divisa*
3. *Oro*

Para fijar ideas pensaremos en dos instantes en el tiempo, el presente $t = 0$ y una unidad de tiempo en el futuro $t = 1$ (alguna unidad de tiempo desde hoy, por ejemplo: mes, año, etc).

Definición 1.5. *La* ***posición en riesgo*** *es el número de activos riesgosos que posee un inversionista.*

El precio actual del activo es S_0 que se considera conocido por todos los inversionistas y S_1 es el precio al tiempo futuro de interés que es desconocido e incierto.

Definición 1.6. *A la difencia $S_1 - S_0$ representada como una fracción del valor inicial se le define como* ***tasa de retorno*** *y la denotaremos por:*

$$K_S = \frac{S_1 - S_0}{S_0}.$$

Por otro lado considerando a un activo libre de riesgo (bono), denotaremos el precio de un bono al tiempo t por A_t. Al contrario de lo que ocurre con S_1, A_1 es conocido con certeza. Por ejemplo, A_1 puede representar un pago garantizado al tiempo 1 por la institución emisora del bono, en este caso se dice que el bono tiene fecha de maduración 1.

Se define de manera análoga la **tasa de retorno**:

$$K_A = \frac{A_1 - A_0}{A_0}.$$

Riesgo y Retorno esperado

Definición 1.7. *Definimos como* ***retorno esperado*** *de un portafolio al valor esperado de la tasa de retorno, es decir,*

$$\mathbb{E}(K_V).$$

Definición 1.8. ***El riesgo*** *de una inversión está definida como la desviación estandás de la variable aleatoria* K_V *y la denotaremos por* σ_V*.*

1.1.1. Supuestos para mercados financieros

Con el fin de construir modelos matemáticos de mercados financieros donde se involucren este tipo de activos es nescesario hacer algunos supuestos.

Supuesto 1. Aleatoriedad. El precio futuro de una acción S_1 es una variable aleatoria con al menos dos elementos en el soporte.

Supuesto 2. Precios posivitos. Todos los activos son estrictamente positivos,

$$A_t, S_t > 0$$

para $t = 0, 1$.

Otro concepto básico en fianzas es el de portafolio financiero. De manera intuitiva entendemos por portafolio financiero al conjunto de activos entre los cuales está repartida la inversió de un agente del mercado a través del tiempo.

El capital total de un inverisonista con a acciones y b bonos al tiempo t es

$$V_t = aS_t + bA_t.$$

Definición 1.9. *A la pareja* (a, b) *se le conoce como* ***portafolio o cartera financiera*** *y* V_t *es el* ***valor del portafolio*** *al tiempo* t*.*

La saltos de precio entre los tiempos generan cambios en el valor del portafolio.A la diferencia entre los valores de un portafolio considerada como una fracción de valor inicial del portalofio la denotaremos por

$$K_V = \frac{V_1 - V_0}{V_0}. \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.1. *Supongamos que* $S_0 = c$ *y* $S_1 = S_0 + d \times X$ *con* $X \sim Ber(p)$ *con* $c, d > 0$ *y* $p \in (0, 1)$.

Supuesto 3. Un inversionista puede tener cualquier número de acciones y bonos, es decir, $a, b \in \mathbb{R}$.

Nota 1.1. *A la posibilidad de tener una fracción de una acción o bono le llamaemos* ***divisibilidad****.*

Supuesto 4. Al hecho cualquier activo puede ser vendido o comprado al precio de mercado en cantidades arbitrarias le llamaremos **liquidez**. En particular, este supuesto es una condición idealista que ayuda a consturir los modelos matemáticos porque en el mercado real pueden existir restricciones sobre el volumen en la comercializacón de los activos financieros.

Si el número de activos de un tipo particular que componen una cartera es positivo, decimos que el inversionista tiene una **posición larga**. En caso contrario decimos que tiene una **posición corta**.

Una posición corta en activo libre de riesgo puede implicar la emisión y venta de bonos, pero en la práctica el mismo efecto financiero se logra más fácilmente tomando prestado dinero en efectivo, en este caso la tasa de interés se determina por los precios de los bonos. Pagar el préstamo con interés se conoce como el **cierre** de la posición corta.

Una posición corta en una acción puede ser realizada por **ventas en corto**, es decir, un inversionista toma prestada la acción, la vende, y utiliza las ganancias para hacer algo de otra inversión. En esta situacion el propietario de las acciones mantiene todos los derechos sobre la misma.

Supuesto 5, Solvencia. El capital de un inversionista debe ser no negativa todo el tiempo,

$$V_t \geq 0,$$

para $t = 0, 1$. Un portafolio que satisface esta condición es llamado **admisible**.

Supuesto 6. El precio futuro S_1 de una unidad de una acción es una variable aleatoria que puede tomar a lo más una cantidad finita de valores.

Principio de No Arbitraje

Motivación. Suponer que el mercado no permite beneficios libres de riesgo sin ninguna inversión inicial.

Ejemplo 1.2. *Supongamos que un corredor A ofrece comprar libras dentro de un año a d_A dolares, mientras el corredor B está vendieno libras de forma instantanea a d_B dolares ($d_B < d_A$). Supongamos además que es posible pedir prestados dolares a una tasa anual r_d y se puede invertir libras a una tasa r_l con $r_l > r_d$. ¿Qué escenario puede presentarse bajo estas condiciones?*

Supuesto 6 Es inadmisible un portafolio tal que $V_0 = 0$ y $V_1 > 0$ con probabilidad positiva.

Si es factible que exista un portafolio que viole este supuesto diremos que hay oportunidad de **arbitraje**.

En general, la selección de precios de activos en el mercado está limitado por el principio de no arbitraje.

Modelo Binomial

Este modelo es donde el precio futuro de una acción puede tomar sólo dos valores distintos,

$$S_1 = \begin{cases} S^u & \text{con probabilidad} \quad p \\ S^d & \text{con probabilidad} \quad 1-p \end{cases}$$

donde $S^d < S^u$ y $p \in (0,1)$.

Proposición 1.1. *Si $S_0 = A_0$ entonces, en el modelo binomial*

$$S^d < A_1 < S^u,$$

o se presenta una oportunidad de arbritaje.

1.1.2. Futuros

Definición 1.10. *Un contrato de* ***futuro*** *es un acuerdo para comprar o vender un activo riesgoso en un momento futuro determinado a un precio* F *determinado en el momento actual.*

Un inversionista que se compromete a comprar el activo se dice que tiene una **posición larga**. Si un inversionista se compromete a vender el activo, se dice que tiene una **posición corta**. No hay costo en el momento de efectuar el contrato. El precio F está determinado con base al principio de no arbitraje.

Además de acciones y bonos, un portafolio puede contener futuros. Si z representa el número de contratos de futuros en un portafolio entonces podemos reescribir el portafolio como (a, b, z). Tenemos

$$V_0 = aS_0 + bA_0$$

y

$$V_1 = aS_1 + bA_1 + z * (S_1 - F).$$

1.1.3. Opciones

Motivación. Supongamos que un inversionista estima que en una fecha futura T, el precio de un activo S_T estará por arriba de un cierto nivel K. A este inversionista le gustaría poder comprar al tiempo T ese activo a un precio K asegurandose así un ganancia $S_T - K$. Más aún, si resulta que su pronóstico no fue correcto $(S_T < K)$ le gustaría tener la posibilidad de no comprar al precio K sino al precio de mercado.

Definición 1.11. ***Opción Call.*** *Es un contrato que da el derecho (no la obligación) de comprar un activo por una cantidad determinada en una fecha específica.*

Definición 1.12. ***Opción Put*** *Es un contrato que da el derecho (no la obligación) de vender un activo por una cantidad determinada en una fecha específica.*

Argot Financiero

- **Prima:** La cantidad que se paga por tener un Call o Put.
- **Activo Subyacenta:** El activo del cual depende el valor de la opción.
- **Precio de ejercicio (Strike):** La cantidad al cual el subyacente será comprado o vendido (K).
- **Fecha de vencimiento:** Momento en el cual se puede ejercer la opción.
- **Payoff** Es el pago que se recibe en la fecha de vencimiento. Para Call es $\max(S_T - K, 0)$ y para un put $\max(K - S_T, 0)$.
- **Posición Larga** La persona que ha comprado el contrato.
- **Posición Corta** La persona quien suscribe el contrato.

1.2. Ejercicios

1. Supongamos que tenemos un portafolio con tres acciones que se modelan como en el Ejemplo 1.1 con p_1, p_2 y p_3 respectivamente y dos bonos con $A_0 = c_A$ y $A_1 = d_A$. Implementar un modelo que calcule V_1.
2. Supongamos que tenemos una trayectoria de precios de una acción cuyo precio evolucionó con la misma estructura que en el Ejemplo 1.1 . Además supongamos conocidos a las constantes c y d. Escribir e implementar la forma de hacer una estimación de p.
3. Impromentar el cálculo del retorno esperado y el riesgo en el portafolio del Ejercicio 1.1.
4. Probar la Proposición 1.1.

Capítulo 2

Modelos de Tasas de Interés

2.1. Introducción

2.1.1. Motivación

De manera intuituva podemos entender a las tasas de interés como una compensación por un servicio y el riesgo implícito al prestar o invertir dinero que dependen del plazo al cual se desea hacer la transacción.

En este sentido, las tasas de interés son un instrumento importante para mantener el valor y flujo del dinero.

En la decada de los 70's se empezaron a desarrollar los primeros modelos analíticos para estudiar la dinámica de las tasas de interés en el tiempo y con ellos el precio de los bonos. Desde ese momento se han tratado de desarrollar modelos más complejos que puedan modelar de manera más precisa el mercado financiero real.

Con los modelos actuales, el estudio de la evolución temporal de las tasas de interés resulta de suma importancia por la posibilidad de utilizarlos para analizar el contenido de información de la estructura de las tasas de interés y hacer pronósticos sobre el futuro de la economía.

2.1.2. Clasificación de los modelos de tasa de interés

- Dependiendo de la temporalidad en la que las tasas de interés pueden cambiar sus modelos son clasificados en **discretos y continuos**.

  1. Los modelos de tasa de interés a tiempo discret son los que contienen unicamente tasas que cambian en intervalos de tiempo especificos (día, mes, año, etc.).
  2. Los modelos de tasa de interés a tiempo continuos son los que contienen tasas que cambian continuamente (no hay saltos o discontinuidades).

- Otra forma común de clasificar a los modelos de tasas de interés es por el número de **factores** que estiman. Por ejemplo el modelo de **Brennan y Schwartz (1979)** (dos factores) toman un enfoque más realista al permitir que los cambios en las tasas de interés instantáneas dependan de su valor actual y de la tasa de interéss de largo plazo.

- Por último, los modelos de tasa de interés se pueden clasificar en modelos de no-arbitraje y modelos de equilibrio.

  1. En un modelo de no-arbitraje, la estructura temporal actual de las tasas de interés son un insumo del modelo.
  2. En un modelo de equilibrio, las tasas de interés son el resultado.

2.2. Conceptos Básicos

Motivación Un peso hoy vale más que un peso mañana.

Definición 2.1. *El activo de renta fija (tasa libre de riesgo) más sencillo es un* ***bono cupón cero (BCC)****. Este tipo de bonos pagan una cantidad especifica (valor nominal) en un determindo tiempo (maduración).*

Nota 2.1. *Siempre que se considere el supuesto que la tasa de interés es mayor a cero el valor de un BCC es menor que su valor nominal. Desde este punto de vista la evolución de un BCC está en función relacionado con la tasa de interés presente en el mercado.*

El valor al tiempo t de un peso ($t \leq T$) es representado por un bono cupón cero $P(t,T)$ con fecha de maduración T (T-bono). Éste es el contrato que garantiza al titular el pago de la cantidad x al tiempo de maduración T. Fijaremos x como la unidad motenaria en moneda nacional.

Supuesto 2.1. *1. Existe un mercado sin fricción (sin intermediarios o costos de transacción) para los T-bonos para toda $T > 0$.*

2. $P(T, T) = 1$ para toda $T > 0$.

3. $P(t, T)$ es continuamente diferenciable en T.

Nota 2.2. *Es importante mencionar que Supuesto 2.1 no necesariamente se cumplen en la realidad ya que:*

1. *Los bonos cupón cero no se comercializan en todos los plazos,*
2. *$P(T, T)$ podrían ser inferior a uno si existe arbitraje.*
3. *El tercer supuesto es una condición técnica que implica que el precio del bono cupón cero $T \to P(t, T)$ sea una curva "suave".*

Nota 2.3. *El precio de $P(t, T)$ es un proceso estocástico desde que no se conoce con certeza el precio al tiempo t antes de ese momento.*

Ejemplo 2.1. ***Modelo de curva "suave"***

Consideremos el proceso de difusión unidimensional $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ que es solución a la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$dX_t = b_\alpha(X_t)dt + \sigma_\beta(X_t)dW_t,$$

donde $W = \{W_t\}$ es un proceso de Wiener estándar y supongamos que se cumplen las condiciones regulares.

Método de Milstein

En la aproximación de Milstein se utiliza el lema de Itô para aumentar la presición en la aproximación mediante la incorporación del término de segundo orden, podemos escribir a esta aproximación por:

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + b(Y_{t_i}, t_i)\Delta_i + \sigma(Y_{t_i}, t_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}\sigma(Y_{t_i}, t_i)\sigma'(Y_{t_i}, t_i)t_i[(\Delta W_i)^2 - \Delta_i],$$

esta aproximación tiene convergencia débil y fuerte de orden uno.

Ejemplo 2.2. ***Modelo de Vasicek.*** *Supongamos que la tasa de interes* $\{r_t\}_{0\leq t\leq T}$ *está modelada por la siguiente ecuación diferencial estocástica*

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

donde r_t *es la tasa al tiempo* t *y* α, β *y* σ *son constantes.*

2.3. Tipos de Tasas de Interés

La estructura de plazo del mercado de bonos no es muy informativa visualmente. Una mejor medida para ello son las **tasas de interés implicadas**.

Supongamos que prestamos una cantidad x (capital) la cual debe ser pagada al tiempo T con una **tasa de interés simple** r por el tiempo T, entonces la cantidad que será pagada al tiempo T es

$$x + xr = x(1 + r).$$

Ahora supongamos que prestamos la misma cantidad x que será pagada después de un año ($T=$ un año) con una **tasa de interés compuesta** semestralemnte.

- ¿Qué significa esto?
- ¿Cómo determinamos la cantidad que nos deben pagar después de un año?

Basicamente esto significa que después de medio año el capital sufrirá una tasa de interés simple proporcional al tiempo transcurrido, es decir, una tasa de $r/2$, y que a continuación se añade interés a la misma tasa al nuevo capital para el segundo período de medio año. En otras palabras, después de seis meses se tiene una deuda de

$$x(1 + r/2).$$

Ahora, al aplicar la misma tasa de interés al nuevo capital se tiene que al final de año se tiene que efectuar un pago de

$$x(1 + r/2)(1 + r/2) = x(1 + r/2)^2.$$

En general podemos entender que si n es el número de periodos de los que se compone el plazo de pago $[0, T]$ de una cantidad x bajo una tasa de interes compuesta r al final de dicho periodo se debe efectuar un pago de

$$x(1 + r/n)^n.$$

La Regla de duplicación. Supongamos que depositamos fondos en una cuenta que paga intereses a una tasa r compuesto anualmente, ¿cuántos años hace se necesita para que sus fondos se dupliquen?

Ahora supongamos que prestamos la misma cantidad x por un año a una tasa anual r **continuamente compuesta**.

- ¿Qué entendemos por continuamente compuesta?
- ¿Cuanto se paga al final del año?

Nota 2.4. *Para entender este concepto es importante observar que si el préstamo se compone a n intervalos iguales en el año, entonces el monto adeudado al final del año es*

$$x(1 + r/n)^n.$$

En este sentido es razonable entender al interés continiamente compuesto como el límite cuando n crece, entonces la cantidad a pagar al final del periodo es

$$lim_{n\to\infty} x(1 + r/n)^n = xe^r$$

2.4. Tasa Forward

Motivación

Al tiempo t (el presente) nos gustaría hacer un contrato que garantiza una tasa de interés libre de riesgo durante el intervalo de futuro $[S, T]$.

Definición 2.2. *A la tasa de interés garantizada en el momento presente para un periodo de tiempo futuro $[S, T]$ se llama tasa **Forward** y es un contrato en el que se involucran tres momentos en el tiempo $t < S < T$.*

Estrategía en un Forward

1. Al tiempo t: vender un S-bono y comprar $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ T-bonos ¿inversión neta?.
2. Al tiempo S: paga un peso.
3. Al tiempo T: se obtiene $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ pesos.

Nota 2.5. *El efecto que se tiene es que una inversión de un peso en el tiempo S producira $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ pesos en el momento T (seguros).*

Con base en a la estrategía Forward la tasa forward es definida como sigue.

Definición 2.3. ***Una tasa forward simple (o tasa LIBOR)*** $F(t;S,T)$*, es la solución a la ecuación*

$$1 + (T-S)F(t;S,T) = \frac{P(t,S)}{P(t,T)},$$

es decir, la tasa forward simple contratada al tiempo t para $[S,T]$ es

$$F(t;S,T) = -\frac{P(t,T) - P(t,S)}{(T-S)P(t,T)}.$$

Definición 2.4. *La **tasa spot simple (tasa cupón cero simple)** para $[S,T]$ está definida por*

$$F(S,T) = -\frac{P(S,T) - 1}{(T-S)P(S,T)}$$

Definición 2.5. ***Una tasa forward continuamente compuesta*** $R(t;S,T)$*, es la solución a la ecuación:*

$$e^{R(t;S,T)(T-S)} = \frac{P(t,S)}{P(t,T)},$$

entonces la tasa forward continuamente compuesta contratada al tiempo t para $[S,T]$ es:

$$R(t;S,T) = -\frac{\log(P(t,T)) - \log(P(t,S))}{T-S}$$

Definición 2.6. ***La tasa spot continuamente compuesta*** $R(S,T)$*, está definida por:*

$$R(S,T) := -\frac{\log(P(S,T))}{T-S}$$

De manera análoga se define la tasar contratada al tiempo S.

Definición 2.7. ***La tasa forward instantátea*** *$f(t,S)$, con maduración en S contratada al tiempo t es:*

$$f(t,S) := \lim_{T\downarrow S} R(t;S,T) = -\frac{\partial \log(P(t,S))}{\partial S}.$$

Nota 2.6. *Esto es equivalente a*

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right),$$

con la condición $P(T,T) = 1$.

La función $T \to f(t,T)$ es llamada curva forward al tiempo t.

Definición 2.8. ***La tasa instantánea short*** *$r(t)$, está definida por:*

$$r(t) =:= \lim_{S\downarrow t} R(t,S) = f(t,t).$$

Proposición 2.1. *Consideremos un mundo determinista. Si el mercado es eficiente entonces*

$$P(t,T) = P(t,S)P(S,T)$$

para todo $t \leq S \leq T$.

De esta proposición se sigue que

$$\int_S^T f(t,u)du = \int_S^T f(S,u)du,$$

para todo $\leq S \leq T$. Esto es equivalente a

$$f(t,T) = f(S,T) = r(T),$$

para todo $t \leq S \leq T$. **¿Qué significa esto?**

2.5. Bonos cupón, Swaps y rendimiento

2.5.1. Bonos cupón fijos

Consideremos una colección finita de momentos en el tiempo (fijos), es decir, puntos al tiempo $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Interpretemos a t_0 como la fecha de emisión del bono y $t_1, \ldots, t_n$ son las fechas cupón. Entonces,

1. En los momentos t_i $(i = 1, \ldots, n)$, el propietario del bono recibirá el cupón determinado c_i.

2. Al tiempo t_n recibe el valor nominal K.

De esta forma el precio de un bono cupón fijo a un tiempo $t < t_1$ está dado por

$$P(t) = KP(t, t_n) + \sum_{i=1}^{n} c_i P(t, t_i). \tag{2.1}$$

Generalmente se supone que $t_i - t_{i-1} = \delta$, y que los cupones están determinados como un porcentaje de K, es general están dados por

$$c_i = \delta K r_i, \tag{2.2}$$

para alguna tasa de interes fija $r_i > 0$.

2.5.2. Bonos a tasa variable

Si reemplazamos la tasa cupón r_i por la tasa spot LIBOR tenemos que el precio de cada cupón está dado por

$$c_i = (t_i - t_{i-1})F(t_{i-1}, t_i)K, \tag{2.3}$$

en particular si $t_i - t_{i-1} = \delta$ y $K = 1$ entonces el precio del i-ésimo cupón al tiempo t_i es

$$c_i = \frac{1}{P(t_{i-1}, t_i)} - 1.$$

Nota 2.7. *Al tiempo $t < t_0$ el valor de cupón c_i debe ser*

$$P(t, t_{i-1}) - P(t, t_i).$$

De la Nota 2.7 se sigue que el precio de un bono de tasa flotante al tiempo $t < t_0$ es

$$P(t) = P(t, t_n) + \sum_{i=1}^{n} [P(t, t_{i-1}) - P(t, t_i)] = P(t, t_0).$$

2.5.3. Swap de tasa de interés

Definición 2.9. *Un **swap de tasa de interés** es un esquema en el que se intercambiar un flujo de pagos a una tasa de interés fija (tasa swap), a un flujo de pagos a tipo variable (normalmente una tasa LIBOR).*

Sea R la tasa swap. Asumimos que los tiempos $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ son equidistantes y que los pagos se presentan en $t_1, \ldots, t_n$. Si intercambiamos una tasa fija por una variable (spot LIBOR) entonces al tiempo t_i recibiriamos

$$K\delta F(t_{i-1}, t_i) \tag{2.4}$$

y pagamos

$$K\delta R. \tag{2.5}$$

Teorema 2.1. *El precio al tiempo $t < t_0$ de un swap dado por las expresiones (2.4) y (2.5) está dado por*

$$\Pi(t) = KP(t, t_0) - K\sum_{i=1}^{n} d_i P(t, t_i), \tag{2.6}$$

donde $d_i = R\delta, i = 1, \ldots, n-1$ y $d_n = 1 + R\delta$

Tasa Swap Forward

Si se asume que los contratos son suscritos al tiempo $t = 0$ y que en ese momento el contrato vale cero, entonces

$$R = \frac{P(0, t_0) - P(0, t_n)}{\delta \sum_{i=1}^{n} P(0, t_i)}.$$

2.6. Rendimiento (Yield)

Definición 2.10. *El **yield** de una tasa de interés es la tasa de retorno que se obtiene del producto (bono) basado en el precio que se pagó y el pago de intereses que se reciben.*

Ejemplo 2.3. *Para el caso del bono cupón cero continuamente compuesto el yield $y(t,T)$ es la solución a la ecuación*

$$P(t,T) = e^{-y(t,T)(T-t)},$$

es decir

$$y(t,T) = -\frac{\log(P(t,T)}{T-t}.$$

Para t fija, la función $T \to y(t,T)$ es llamada la **curva yield**.

Hay básicamente dos tipos de yield para los bonos: yield o rendimiento ordinario (Current Yield) y yield o rendimiento de maduración (Yield to madurity).

Yield to madurity

El yield to maturity $y(t,T)$ de un bono cupón fijo al tiempo t con un precio de mercado p y pagos c_i a los tiempos t_i es definido como el valor y que es solución a la ecuación

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-y(t_i-t)}.$$

Para el bono cupón fijo anterior con al tiempo $t=0$ y yield to maturity y, la **duración** D está definida como

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-yt_i}}{p}.$$

que es un promedio ponderado de las fechas cupón.

Yield Curve

El Yield curve al tiempo t es la gráfica de la función

$$T \to \begin{cases} F(t,T) & t \leq T \leq t+1 \\ Y(t,T) & T > t+1 \end{cases},$$

donde $F(t,T)$ es la tasa spot LIBOR y $Y(t,T)$ es la tasa de interés spot compuesta.

2.6.1. Bootstrapping

El método "Bootstrapping" consiste en estimar de manera recursiva niveles de tasas cero a partir de la información de los precios de los bonos o de la Yield,cpara ambos casos, generalmente, se cuenta con información a largo plazo.

Para poder aplicar esta metodología necesitamos tabajar bajo el supuesto que el precio de un bono es igual al valor presente de sus flujos de efectivo utilizando las tasas cero para el descuento.

Consideremos otra vez un bono con estructura de pagos en los momentos en el tiempo (fijos), $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, costo del bono c_i y valor nominal K.
Supuesto de equivalencia

El Precio del bono es igual al Valor Presente de los flujos de efectivo con tasas cero, por lo que la única incógnita es la tasa cero del último flujo de efectivo, denotada por r_i, es decir.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+Y/m)^{m(t_i-t)}} + \frac{K}{(1+Y/m)^{m(t_n-t)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+r_it_i)} + \frac{K}{(1+r_nt_n)}.$$

Entonces para determinar a r_n se tiene que

$$\left(\frac{c_n+K}{\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+Y/m)^{m(t_i-t)}} + \frac{K}{(1+Y/m)^{m(t_n-t)}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{(1+r_it_i)}} - 1 \right) \frac{1}{t_n}$$

2.7. Modelos de tasas de interés con Cadenas de Markov.

2.7.1. Caso tiempo discreto

Supongamos que la evolución de una tasa de interés tiene un comportamiento aleatorio y que el registro más reciente contiene información suficiente para hacer inferencia sobre su comportamiento futuro. Además, supongamos que la tasa de interés sólo puede cambiar en momentos a tiempo discreto.

Motivados en esto, sea $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{1, 2, \ldots, m\}$. Definimos

$$X_n = \text{mín}_{k\in E}|Y_n - k|$$

donde Y_n es el la tasa de interés al tiempo n.

2.7.2. Caso tiempo continuo

Supongamos que la evolución de una tasa de interés tiene un comportamiento aleatorio y que el registro más reciente contiene información suficiente para hacer inferencia sobre su comportamiento futuro. Además, supongamos que la tasa de interés se mantiene estable alrededor de un valor un cierto periodo de tiempo aleatoria y luego migra hacía otra vecindad.

Motivados en esto, sea $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ una cadena de Markov a tiempo contínio con espacio de estados $E = \{1, 2, \ldots, m\}$. Definimos

$$X_t = \text{mín}_{k\in E}|Y_t - k| \qquad\qquad t \in [\tau_{i-1}, \tau\text{–}i)$$

Y_t es el valor sobre el que la tasa de interés se estabiliza durante el intervalo de tiempo $[\tau_{i-1}, \tau\text{–}i)$.

2.8. Ejercicios

1. Escribir un código que calcule y compare la evolución del capital invertido a tasas de interes simple, copmpuesta y continuamente compuesta. Hacer gráficas ilustrativas.

2. Escribir un código que calcule el tiempo en el que se dublica un capital invertido a una tasa de interés compuesto r. Hacer una gráfica con diferentes tasa de interés para observar la sensibilidad del tiempo para duplicar el capital en función a la tasa de interés.

3. Probar que esto también significa que la totalidad del bono a tasa flotante puede ser replicado a través de una cartera de autofinanciable.

4. Suponga que la información del archivo ** contiene la evolución histórica de un una tasa de interés bajo el modelo discreto.

a) Estimar la matriz de transición de la correspondiente cadena de Markov.

b) Hacer proyección de la evolución futura de la tasa de interés

c) ¿ Qué pueden decir del comportamiento a largo plazo?

5. Suponga que la información del archivo ** contiene la evolución histórica de un una tasa de interés bajo el modelo continuo y en el archivo ** están los tiempos de saltos correspondientes

   a) Estimar el generador infinitesisma de la correspondiente cadena de Markov.

   b) Generar trayectorias para la tasa de interés.

   c) ¿ Qué pueden decir del comportamiento a largo plazo?

Capítulo 3

Portafolios y Arbitraje

3.1. Definiciones y notación

Consideremos el vector

$$\bar{S}_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^n)$$

denota los precios $S_t^i > 0$ al tiempo t de n activos riesgosos. Para $t = 1$, éstos están definidos en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Además, suponemos que los activos libres de riesgo $(S_t^0 = A_t)$ A_0 tienen un rendimiento con tasa de interés r, es decir

$$A_1 = (1 + r)A_0.$$

Definición 3.1. *Definimos el* ***portafolio*** *correspondiente al vector $\bar{S}$ denotado por*

$$\bar{\xi} = (\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^n)$$

donde ξ^0 representa el cantidad de activos A y ξ^i la correspondiente de S^i para $i = 1, \ldots, n$.

Nota 3.1.

1. *Si $\xi^0 > 0$, se invierte la cantidad $\xi^0 A_0 > 0$ a una tasa de interés r y si $\xi^0 < 0$ se presta la cantidad $-\xi^0 A_0 > 0$ a la misma tasa de interés r.*

2. *Para $i = 1, \ldots, n$, si $\xi^i > 0$ se compran $\xi^i > 0$ del i-ésimo activo y si $\xi^i < 0$ se venden en corto $-\xi^i > 0$ del i-ésimo activo.*

Definición 3.2. *El portafolio $\bar{\xi}$ constituye una oportunidad de arbitraje si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $V_0 \leq 0$,
2. $V_1 \geq 0$,
3. $\mathbb{P}(V_1 > 0) > 0$, *con* $V_t = \bar{\xi}\bar{S}_t$.

Definición 3.3. *Una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ en $(\Omega, \mathscr{F})$ es una medida netral al riesgo si*

$$E_{\mathbb{Q}}[S_1^i] = (1+r)S_0^i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Teorema 3.1. *En un mercado no se presenta oportunidad de arbitraje si y sólo si, éste admite al menos una medida equivalente neutral al riego.*

Nota 3.2. *Dos medidas de probabilidad $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ son equivalentes cuando*

$$\mathbb{P}_1(A) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathbb{P}_2(A) = 0, \quad \text{para todo} \quad A \in \mathscr{F}.$$

3.2. Cobertura de derivados (Contingent Claims)

Un **derivado** es activo financiero cuyo valor se deriva de otro (uno o más) activo **subyacente**. En este sentido podemos entender a un derivado como un activo cuyo payoff al tiempo $t = 1$ está dado por una variable aleatoria no negativa

$$D : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Definición 3.4. *Un portafolio $\bar{\xi}$ **replica** a un derivado D si su valor al tiempo $t = 1$ es D en todos los posibles escenarios, es decir,*

$$D = \bar{\xi}\bar{S}_1.$$

*y se dice que D es **replicable**.*

Cuando un derivado D es replicable un inversionista puede:

1. En $t = 0$ construir un portafolio $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^n)$,

2. invertir la cantidad $\bar{\xi}\bar{S}_0$
3. En $t = 1$ pagar D usando el valor del portafolio $\bar{\xi}\bar{S}_1$.

La cantidad que el comprador del derivado pagará es: El **precio de arbitraje** de un derivado D denotado por

$$\pi(D) := \bar{\xi}\bar{S}_0 = V_0.$$

Un precio **justo (libre de arbitraje)** para un derivado D es aquel que **no** permite oportunidades de arbitraje.

Teorema 3.2. *Si un portafilio $\bar{\xi}$ replica a un derivado D en el modelo binomial a un periodo , entonce existe un único precio libre de arbitraje D_0 al tiempo $t = 0$ que sea igual al valor inicial del portafolio, es decir,*

$$D_0 = V_0.$$

La prueba se deja de ejercicio para el lector.

Definición 3.5. *Una estrategia financiera que intenta reducir el riesgo de pérdida debido a movimientos desfavorables de mercado con respecto a un portafolio $\bar{\xi}$ tal que*

$$D = \bar{\xi}\bar{S}_1,$$

*es llamada una **cobertura**.*

Definición 3.6. *Un mercado de derivados es **completo** si cualquier derivado es replicable.*

Teorema 3.3. *Un mercado sin oportunidad de arbitraje es completo si y sólo si admite una única medida neutral al riesgo.*

La prueba se deja de ejercicio para el lector.

Ejemplo 3.1. *Consideremos un portafolio con $n = 1$, $\Omega = \{\omega^-, \omega^+\}$ y una medida de probabilidad $\mathbb{P}$, tal que $\mathbb{P}(\{\omega^-\}) = p$ y $\mathbb{P}(\{\omega^+\}) = 1 - p$. Adicionalmente supongamos que*

$$S_1^1(\omega^-) = a \qquad y \qquad S_1^1(\omega^+) = b,$$

con $0 < a < b$.

1. *¿Hay oportunidad de arbitraje en este mercado?*

2. *¿Es un mercado completo?*

Nota 3.3. *El precio de arbitraje $\pi(D)$ del derivado en este Ejemplo 3.1 está dado por*

$$\pi(D) = \frac{1}{(1+r)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D].$$

Nota 3.4. *EL hecho de poder obtener a $\pi(D)$ de forma álgebraica y probabilista no es una coincidencia.*

Capítulo 4

Modelos a tiempo discreto

Consideremos un proceso estocástico $\{X_t\}_{n\in T}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Vamos a considerar el caso cuando $T = \{0, 1, \ldots, N\}$. El **portafolio** correspondiente será denotado por $\bar{\xi}_t = (\xi_t^0, \xi_t^1, \ldots, \xi_t^n)$, donde ξ_t^i representa la cantidad de i-ésimos activos durante el periodo $(t-1, t]$ y $t \in \{1, \ldots, N\}$.

Nota 4.1. *$\bar{\xi}_t$ permance constante en el intervalo de tiempo $(t-1, t]$ mientras el precio de los activos cambia de S_{t-1} a S_t en ese periodo. En otras palabras*

$$\xi_t^i S_{t-1}^i$$

representa la inversión en el activo i al inicio del periodo $(t-1, t]$ mientras

$$\xi_t^i S_t^i$$

es el valor del portafolio al final de este periodo, tiempo t.

Definición 4.1. *Decimos que el portafio $\{\bar{\xi}_t\}_{t=1,\ldots,N}$ es autofinanciable si*

$$\bar{\xi}_t \bar{S}_t = \bar{\xi}_{t+1} \bar{S}_t \qquad t = 1, 2 \ldots, N-1.$$

Denotemos por $\bar{X}_t := (X_t^0, X_t^1, \ldots, X_t^n)$ al vector de precios descontados a tasa fija r, es decir,

$$X_t^i = \frac{S_t^i}{(1+r)^t},$$

con $i = 0, 1, \ldots, n$ y $t = 0, 1, \ldots, N$.

Definición 4.2. *El valor del portafolio descontado al tiempo cero está definido por*

$$\hat{V}_t := \frac{\bar{V}_t}{(1+r)^t} = \bar{\xi}_t \bar{X}_t,$$

con $t = 0, 1, \ldots, N$ *y*

$$\hat{V}_0 = \bar{\xi}_1 \bar{S}_0,$$

4.1. Opciones exóticas

Las opciones exóticas son todas aquellas "no tradicionales", entendiendo por éstas a todas aquellas que tienen un precio fijo y cuyo valor depende del precio del subyacente en el momento del ejercicio. Estos productos son negociados normalmente over-the-counter (OTC).

Entre las opciones exóticas se distinguen diferentes modalidades, entre las que se encuentran aquellas cuyo valor es dependiente de la evolución histórica del precio del subyacente. Según la forma en que esta evolución afecta al valor de la opción se pueden distinguir los siguientes tipos de opciones exóticas.

4.1.1. Opciones asiáticas

Las opciones asiáticas son aquellas cuyo valor depende del promedio de los valores que ha alcanzado el precio del subyacente en determinados momentos a lo largo de la vida de la opción, o de parte de ella. También se conocen como opciones promedio.

El promedio utilizado normalmente es la media aritmética, aunque en ocasiones también, se utiliza la media geométrica. El vencimiento de la opción suele coincidir con el momento en el que se toma el último precio incorporado a la media.

Payoff

1. El payoff de una **opción call asiática** con respecto al subyacent i-ésimo con fecha de ejercicio N y strike K es

$$D = \left(\frac{\sum_{t=0}^{N} S_t^i}{N+1} - K \right)^+ .$$

2. El payoff de una **opción put asiática** con respecto al subyacent i-ésimo con fecha de ejercicio N y strike K es

$$D = \left(K - \frac{\sum_{t=0}^{N} S_t^i}{N+1} \right)^+ .$$

Ejemplo 4.1. *Supongamos que el precio del subyacente i-ésimo sigue un proceso de difusión geométrico, es decir,*

$$dS_t^i = \mu S_t^i dt + \sigma S_t^i dW_t^i,$$

Considerando los supuestos del modelo de Black-Scholes para un intervalo de tiempo $[t_{i-1}, t_i]$*, se tiene que:*

$$ln(S_{t_i}^i)|S_{t_{i-1}}^i \sim N(ln(S_{t_{i-1}}) + (\mu - \sigma^2/2)(t_i - t_{i-1}), \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}})$$

Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo es un modelo de simulación que consiste esencialmente en un muestreo artificial o simulado; es decir, en generar números aleatorios para convertidos luego en observaciones de la variable aleatoria del modelo.

En nuestro caso, la variable aleatoria, cuya distribución desconocemos, es la media aritmética de los valores alcanzados por el índice

$$A_i(t_N) = \frac{\sum_{t=0}^{N} S_t^i}{N+1}.$$

Para esto se necesita generar valores $S_1, \ldots, S_N$. Siguiendo la distribución de $ln(S_{t_i}^i)|S_{t_{i-1}}^i$ tenemso el siguiente algoritmo.

Algoritmo 4.1. *Algoritmo para calcular el precio de una opción asiática*

Dado el valor S_0^i

1. Generar una muestra de tamaño k de S_{t_i} donde

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} e^{(\mu-\sigma^2/2)(t_i-t_{i-1})+\sigma\epsilon_i\sqrt{t_i-t_{i-1}}}$$

donde

$$\epsilon_i \sim N(0,1),$$

para $i = 1\ldots,N$.

2. Utilizar esa muestra para estimar el valor

$$\mathbb{E}\left[(A_i(t_N) - K)^+\right]$$

3. Hacer

$$D = e^{-r(t_N-t_0)}\mathbb{E}\left[(A_i(t_N) - K)^+\right].$$

4.1.2. Opciones Barrera

Definición 4.3. *Son aquellas opciones en las que se determina un valor denominado* ***barrera****, de forma que la opción comienza a existir o desaparece si el valor del subyacente alcanza dicho nivel; es decir, que el dueño de la opción percibirá su remuneración en función de que el precio del subyacente alcance o no, en algún momento de la vida de la opción, el nivel predeterminado.*

payoff

1. El payoff de una **opción call barrera** con respecto al subyacente i-ésimo con fecha de ejercicio N, barrera B y strike K es

$$D = (S_N^i - K)^+ \mathbb{I}_{\{\text{mín}_{t=0,1,\ldots,N} S_t^i > B\}}.$$

2. El payoff de una **opción put barrera** con respecto al subyacent i-ésimo con fecha de ejercicio N, barrera B y strike K es

$$D = (K - S_N^i)^+ \mathbb{I}_{\{\text{máx}_{t=0,1,\ldots,N} S_t^i < B\}}.$$

4.1.3. Opciones lookback

Definición 4.4. *Son aquellas en las que la remuneración al dueño de la opción se establece en función de la cotización máxima o mínima alcanzada por el subyacente a lo largo de la vida de la opción.*

Payoff

1. El payoff de una **opción call lookback** con respecto al subyacente i-ésimo con fecha de ejercicio N es
$$D = S_N^i - \min_{t=0,1,\ldots,N} S_t^i.$$

2. El payoff de una **opción put lookback** con respecto al subyacent i-ésimo con fecha de ejercicio N es
$$D = \max_{t=0,1,\ldots,N} S_t^i - S_N^i.$$

4.2. Mercados completos y medidas neutrales al riesgo

Conideremos a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}$ con elementos definidos por

$$\mathscr{F}_t = \sigma(S_t^i; i = 1, 2, \ldots, n),$$

para $t = 0, 1, \ldots, N$.

Definición 4.5. *Una medida $\mathbb{Q}$ definida en $(\Omega, \mathscr{F})$ se dice que es **neutral al riesgo** si*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{t+1}^i | \mathscr{F}_t] = (1 + r) S_t^i,$$

para $t = 0, 1, \ldots, N-1$, $i = 0, 1, \ldots, n$ y r una tasa de interés libre de riesgo.

Nota 4.2. *La condición anterior puede reescribirse como*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{S_{t+1}^i - S_t^i}{S_t^i} | \mathscr{F}_t] = r.$$

Proposición 4.1. *Una medida* $\mathbb{Q}$ *definida en* $(\Omega, \mathscr{F})$ *se dice que es neutral al riesgo si y sólo si el precio descontado* X_t^i *es una martingala bajo* $\mathbb{Q}$.

Teorema 4.1. *Un mercado no presenta oportunidad de arbitraje si y sólo si admite al menos una medida equivalente neutral al riesgo.*

Referencia: J.M. Harrison and D.M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod se- curities markets. Journal of Economic Theory, 20:341–408, 1979.

Definición 4.6. *Un derivado con payoff* D *es replicable si exite* $(\bar{\xi}_t)_{t=1,\ldots,N}$ *tal que*

$$D = \bar{\xi}_N \bar{S}_N.$$

En este caso se dice que $(\bar{\xi}_t)_{t=1,\ldots,N}$ es una **cobertura** para D.

Definición 4.7. *Un mercado es* ***completo*** *si todo derivado es replicable.*

Teorema 4.2. *Un mercado sin oportunidad de arbitraje es completo si y sólo si admite una única medida equivalente neutral al riesgo.*

4.3. Modelo de Cox-Ross-Runbinstein (CRR)

Este modelo es basicamente el modelo binomial en $N+1$ momentos. El precio S_t^0 (activo libre de riesgo) es

$$S_t^0 = S_0^0 (1+r)^t.$$

La tasa de retorno es

$$R_t^i := \frac{S_t^i - S_{t-1}^i}{S_{t-1}^i}.$$

En el modelo CRR $n = 1$ la tasa R_t^i es aleatoria y puede tomar dos valores a y b en cada momento en el tiempo con $-1 < a < b$. Entonces la evolución de S_{t-1} a S_t es aleatoria y está deteminada por

$$S_t = (1 + R_t) S_{t-1}$$

y

$$S_t = \prod_{j=1}^{t}(1+R_j)S_0.$$

Por otro lado podemos escribir al precio descontado como

$$X_t = \frac{S_0}{(1+r)^t}\prod_{j=1}^{t}(1+R_j) = X_0\prod_{j=1}^{t}\frac{1+R_j}{1+r}.$$

Teorema 4.3. *El modelo CRR es libre de oportunidad de arbitraje si y sólo si $a < r < b$. En este caso el mercado es completo.*

4.4. Precio de derivados

Consideremos un derivado replicable con payoff $D \geq 0$.

Lema 4.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *El portafolio $(\bar{\xi}_t)_{t=1,\ldots,N}$ es autofinanciable.*
2. *$\bar{\xi}_t\bar{X}_t = \bar{\xi}_{t+1}\bar{X}_t$ para $t = 1, 2\ldots, N-1$.*
3. *$\hat{V}_t = \hat{V}_0 + \sum_{j=1}^{t}\bar{\xi}_j(\bar{X}_j - \bar{X}_{j-1})$, para $t = 0, 1, \ldots, N$.*

Una consecuencia del Lema 4.1 es que si un derivado D con payoff descontado

$$\hat{D} := \frac{D}{(1+r)^N}$$

es replicable por el portafolio autofinanciable $(\bar{\xi}_t)_{t=1,\ldots,N}$ entonces

$$\hat{D} = \bar{\xi}_N\bar{X}_N = \bar{V}_N = \bar{V}_0 + \sum_{t=1}^{N}\bar{\xi}_t(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}).$$

Teorema 4.4. *El precio de arbitraje $\pi_t(D)$ de un derivado D está dado por*

$$\pi_t(D) = \frac{E_{\mathbb{Q}}[D|\mathscr{F}_t]}{(1+r)^{N-t}}.$$

Demostración. Mostraremos que bajo la medida neutral al riesgo $\mathbb{Q}$ el precio descontado de cualquier portafolio autofinanciable que cubre a D está dado por

$$\hat{V}_t = E_{\mathbb{Q}}[D|\mathscr{F}_t],$$

para $t = 0, 1, \ldots, N.$, lo que implica qué

$$V_t = \frac{E_{\mathbb{Q}}[D|\mathscr{F}_t]}{(1+r)^{N-t}}.$$

□

Nota 4.3. *El proceso del valor del portafolio descontado $\{\hat{V}_t\}_{t=0,1,\ldots,N}$ es una martigala bajo $\mathbb{Q}$.*

Definición 4.8. *Por una* ***cobertura*** *para un derivado replicable D entenderemos a la estrategía de portafolio autofinanciable $\{\bar{\xi}_t\}_{t=1,\ldots,N}$ tal que*

$$\bar{\xi}_N \bar{S}_N = D.$$

Nota 4.4. *Dicha estrategía puede ser calculada inductivamente hacía atras por el Lema 4.1.*

4.4.1. Precio de una opción Vanilla en el modelo CRR

Consideremos una posición call en una opción Europea con payoff

$$D = f(S_N) := (S_N - K)^+,$$

y

$$\hat{D} = \hat{f}(x) := \frac{f(x)}{(1+r)^N}.$$

Proposición 4.2. *El precio $\pi_t(D)$ de un derivado D satisface*

$$\pi_t(D) = \nu_t(S_t)$$

para $t = 0, 1, \ldots, N$ y donde

$$\nu_t(S_t) = \frac{1}{(1+r)^{N-t}} \sum_{j=0}^{N-t} \binom{N-t}{j} q^j (1-q)^{N-t-j} f(S_t(1+b)^j(1+a)^{N-t-j}).$$

Nota 4.5. *Podemos calcular el precio del portafolio descontado $\hat{V}_t$ de manera inductiva (hacía atras), es decir,*

$$\hat{V}_t = \hat{\nu}_t(S_t) = (1-q)\hat{\nu}_{t+1}((1+a)S_t) + q\hat{\nu}_{t+1}((1+b)S_t)$$

y con condicion terminal

$$\hat{\nu}_N(x) = \hat{f}(x).$$

4.4.2. Cobertura de una opción Vanilla en el modelo CRR

Nuestro objetivo es calcular el portafolio autofinanciable que sea cobertura para una opción vanilla con payoff

$$D = f(S_N).$$

Proposición 4.3. *El portafolio $(\xi_t^0, \xi_t^1)_{t=1,\ldots,N}$ que replica y es cobertura para el derivado $D = f(S_N)$ está dado por*

$$\xi_t^1 = \frac{\hat{\nu}_t((1+b)S_{t-1}) - \hat{\nu}_t((1+a)S_{t-1})}{X_{t-1}(b-a)/(1+r)}$$

y

$$\xi_t^0 = \frac{\hat{\nu}_{t-1}(S_{t-1}) - \xi_t^1 X_{t-1}}{\pi_0^0},$$

para $t = 1, \ldots, N$.

4.4.3. Cobertura de opciones exóticas en el modelo CRR

Consideremos la medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{Q}$ definida por

$$\mathbb{Q}(R_{t+1} = a | \mathscr{F}_t) = \frac{b-r}{b-a} = 1-q$$

y

$$\mathbb{Q}(R_{t+1} = b | \mathscr{F}_t) = \frac{r-a}{b-a} = q.$$

Dados

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega = \{-1, 1\}^N,$$

y $k \in \{1, \ldots, N\}$, sean

$$\omega_+^k = (\omega_1, \omega_{k-1}, +1, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_N)$$

y

$$\omega_-^k = (\omega_1, \omega_{k-1}, -1, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_N).$$

Con $R_t(\omega_+^t) = b$ y $R_t(\omega_-^t) = a$ para $t = 1, 2, \ldots, N$ y $\omega \in \Omega$.

Definición 4.9. *El operador C_t está definido por*

$$C_t Z(\omega) = Z(\omega_+^t) - Z(\omega_-^t)$$

para cualquier variable aleatoria Z y $t = 1, \ldots, N$.

Definición 4.10. *Sea Y_t el retorno centrado y normalizado definido por*

$$Y_t := \frac{R_t - r}{b - a}.$$

Nota 4.6.

1. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_t] = 0$.
2. $Var[Y_t] = q(1-q)$.
3. $C_t Y_t = 1$.
4. $C_t S_N = \frac{b-a}{1+R_t} S_N$.

Teorema 4.5. ***Representación de Martingalas*** *Sea $\mathbb{Q}$ la medida bajo la cual el proceso S es $\mathscr{F}$-martingala. Sea M otra $\mathscr{F}$-martingala bajo $\mathbb{Q}$, entonces existe el proceso predecible ψ tal que*

$$M_k = M_0 + \sum_{i=1}^{k} \psi_i \Delta S_i.$$

Proposición 4.4. ***Fórmula de Clarck-Ocone*** *Para cualquier variable aleatoria $Z \in L^2(\Omega)$ se tiene que*

$$Z = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_k Z | \mathscr{F}_{k-1}] Y_k.$$

Corolario 4.1. *Supongamos que $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una $\mathscr{F}$-martingala con $M_k \in L^2(\Omega)$. Entonces*

$$M_N = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_N] + \sum_{k=1}^{N} Y_k C_k M_k.$$

Proposición 4.5. *Sea $\{Z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un proceso $\mathscr{F}_k$-adaptado y $f:\mathbb{R}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ una función. Entonces*

$$f(Z_k,k)=f(Z_0,0)+\sum_{n=1}^{k}C_nf(Z_n,n)Y_n+\sum_{n=1}^{k}(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(Z_n,n)|\mathscr{F}_{n-1}]-f(Z_{n-1},n-1)).$$

Nota 4.7. *Si $\{Z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una $\mathscr{F}_k$-martingala en $L^2(\Omega)$ y lo escribimos como*

$$Z_k=Z_0+\sum_{n=1}^{k}\mu_nY_n,$$

para $k\in\mathbb{N}$, donde $\{\mu_k\}$ es un proceso localmente predecible en $L^2(\Omega\times\mathbb{N})$, entonces

$$C_kf(Z_k,k)=f(Z_{k-1}+q\mu_k,k)-f(Z_{k-1}-(1-q)\mu_k,k).$$

Nota 4.8. *Si $\{f(Z_k,k)\}_{k\mathbb{N}}$ es una $\mathscr{F}_k$-martingala tenemos*

$$f(Z_k,k)=f(Z_0,0)+\sum_{n=1}^{k}Y_nC_nf(Z_n,n).$$

Ejemplo 4.2. *Tenemos la siguiente representación martingala*

$$X_k=S_0+\sum_{n=1}^{k}Y_nC_nX_n$$

Objetivo Tener una estrategía de cobertura $(\eta_t,\xi_t)_{t=1,\dots,N}$ para D tal que

$$D=V_N=\eta_NA_N+\xi_NS_N.$$

Proposición 4.6. *Dado un derivado D sea*

$$\xi_t=\frac{(1+r)^{-(N-t)}}{S_{t-1}(b-a)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_tD|\mathscr{F}_{t-1}],$$

y

$$\eta_t=\frac{1}{A_t}\left((1+r)^{-(N-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D|\mathscr{F}_t]-\xi_tS_t\right),$$

para $t=1,\dots,N$. Entonces el portafolio (η_t,ξ_t) es autofinanciable y satisface

$$V_t=(1+r)^{-(N-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D|\mathscr{F}_t],$$

para $t=1,\dots,N$. En particular, es una cobertura para D.

4.5. convergencia del modelo CRR

Consideremos un derivado con fecha de maduración T y una subdivisión del intervalo de tiempo $[0,T]$ en N periodos (de mismo tamaño), es decir,

$$\{[0,T/N],(T,2T/N],\dots,((N-1)T/N,T]\}.$$

Supongamos que el mercado se compone sólo de un activo libre con precios A_t^N para $t=0,1,\dots,N$ y un activo riesgos con precios S_t^N para $t=0,1,\dots,N$.

Objetivo Encontrar el precio de un derivado, con fecha de maduración T, asociado al precio de estos activos cuando N converge a infinito.

Desde que el valor terminal del activo libre de riesgo debe converger, suponemos que

$$\lim_{N\to\infty}(1+r_N)^N=e^{rT},$$

para r una constante. Esta condición es equivalente a

$$\lim_{N\to\infty}Nr_N=rT.$$

Por otro lado, los precios S_t^N son variables aleatorias definidad en un espacio de probabilidad $(\Omega_N,\mathscr{F}^N,\mathbb{P}_N^*)$ donde $\mathbb{P}_N^*$ es una medida neutral al riesgo.

Hipótesis del modelo.
Para cada N.

1. Las variables aleatorias de los rendimientos $R_1^N,\dots,R_N^N$ son independientes bajo la medida ¿$\mathbb{P}_N^*$.
2. Existen constantes a_N y b_N que satisfacen que

$$-1\le a_N\le R_t^N\le b_N,$$

para $t=1,\dots,N$.

3. Las varianzas de R_t^N bajo $\mathbb{P}_N^*$ son tales que

$$\sigma_N^2=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{N}Var^N(R_t^N)\to\sigma^2>0.$$

4. El precio S_0^N es independiete de N lo denotamos por S_0.

Teorema 4.6. *Dadas las hipótesis anteriores, la distribución de* S_T^N*, bajo la medida* $\mathbb{P}_N^*$*, converge en distribución a una variable aleatoria con distibución LogNormal de parámetros* $\log(S_0) + rT - \frac{\sigma^2 T}{2}$ *y* $\sigma\sqrt{T}$*, es decir,*

$$S_T = S_0 \exp(\sigma W_T + rT - \frac{\sigma^2 T}{2}),$$

donde $W_T \sim N(0, T)$*.*

Ejemplo 4.3. *Consideremos el modelo CRR con el método de aproximación descrito en N periodos con tasa de interes*

$$r_N = \frac{rT}{N}.$$

Necesitamos aplicar una renormalización a los coeficientes a y b del modelo CRR. Sea $\sigma > 0$ que denote la volatilidad del mercado y a_N, b_N definidos de la forma

$$\frac{1 + a_N}{1 + r_N} = e^{-\sigma\sqrt{T/N}} \qquad \frac{1 + b_N}{1 + r_N} = e^{\sigma\sqrt{T/N}}$$

Supongamos que R_t^N puede tomar sólo valores en $\{a_N, b_N\}$ y se tiene que $a_N < R_t^N < b_N$ para $t = 1, \ldots, N$ y N suficientemente grande. Entonces la única medida neutral al riesgo es

$$\mathbb{P}_N^*(R_t^N = a_N) = \frac{b_N - r_N}{b_N - a_N} = \frac{e^{\sigma\sqrt{T/N}} - 1}{2senh(\sqrt{\sigma^2 T/N})}$$

y

$$\mathbb{P}_N^*(R_t^N = b_N) = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N} = \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}}{2senh(\sqrt{\sigma^2 T/N})},$$

para $t = 1, \ldots, N$. Entonces tenemos que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_N^*(R_t^N = a_N) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_N^*(R_t^N = b_N) = \frac{1}{2}.$$

Además

$$\mathbb{E}_N^*[R_t^N] = r_N$$

y

$$\sum_{t=1}^{N} Var^N(R_t^N) = N(\mathbb{P}_N^*(R_t^N = b_N)b_N^2 + \mathbb{P}_N^*(R_t^N = a_N)a_N^2 - r_N^2) \to \sigma^2 T.$$

Ahora, consideremos un derivado que esté definido en términos de una función $f \geq 0$ de un activo riesgoso en su precio a la fecha de maduración. Es decir

$$D^N = f(S_N^N).$$

Corolario 4.2. *Si f es una función continua y acotada, se tiene que el precio libre de arbitraje calculado bajo la medida $\mathbb{P}_N^*$ satisface*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_N^*[\frac{D^N}{(1+r_N)^N}] = e^{-rT}\mathbb{E}^*[f(S_T)] = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \sigma^2 T/2})e^{-y^2/2}dy,$$

donde S_T es la del 4.6.

Ejemplo 4.4. ***Fórmula de Black- Scholes***. *En el límite del precio libre de arbitraje para un derivado en una opción call Europea, es decir, $D^N = (S_N^N - K)^+$ está dado por*

$$\nu(S_0, T) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (S_0 e^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \sigma^2 T/2} - K)^+ e^{-y^2/2}dy.$$

Nota 4.9. *Para*

$$y \leq -\frac{\log(\frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

el integrando se va cero.

Definimos

$$d_+ := d_+(S_0, T) = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

y

$$d_- := d_-(S_0, T) = d_+ - \sigma\sqrt{T},$$

entonces

$$\nu(S_0, T) = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_-}^{\infty} e^{-\frac{(y-\sigma\sqrt{T})^2}{2}}dy - e^{-rT}K\Phi(d_-(S_0, T)).$$

De esta forma obtenemos la fórmula de Black-Scholes para el precio de una opción call Europea con strike K y fecha de maduración T

$$\nu(S_0, T) = S_0\Phi(d_+(S_0, T)) - e^{rT}K\Phi(d_-(S_0, T)).$$

4.6. Ejercicios

1. Implementar el método de Monte Carlo para calcular el precio de una opción y utilizar el método de reducción de varianza Kenna y Vost (1990).

2. Valoración de opciones asiáticas geométricas:

   a) Método aproximado de Vorst

   b) Método aproximado de Levy

   c) Método aproximado de Turnbull y Wakeman

3. Estimar el precio de una opción barrera para ambas posiciones, suponiendo que el precio del subyacente es modelado por un movimiento borwniano geométrico.

4. Estimar el precio de una opción lookback para ambas posiciones suponiendo que el precio del subyacente es modelado por un movimiento borwniano geométrico.

5. Consideren el modelo CRR a los tiempos $t = 0, 1, \ldots, N$. Demuestre que la medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ definida por

   $$\mathbb{Q}(R_{t+1} = a | \mathscr{F}_t) = \frac{b - r}{b - a}$$

   y

   $$\mathbb{Q}(R_{t+1} = b | \mathscr{F}_t) = \frac{r - a}{b - a}.$$

   a) Es una medida neutral al riesgo,

   b) Bajo que condiciones es equivalente a $\mathbb{P}$

   c) Ver que satisface

   $$E[S_{t+k} | \mathscr{F}_t] = (1 + r)^k S_t,$$

   para $t = 0, \ldots, N - k$ y $k = 0, \ldots, N$.

   d) Implementar este mdoelo

6. Implementar la fórmula de Black-Scholes para el precio de una opción call Europea como función de S_0 y N.

Bibliografía