Probabilidad I	2022-1

Lecture : Teoremas Límite de Variables Aleatorias

Lecturer: F. Baltazar-Larios *Scribe: .*

1. Introducción

Consideremos que en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ estarán definidas todas las variables aleatorias consideradas en este documento.

Definición 1.1. *Una colección finita de v.a.i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ es llamada muestra aleatoria (m.a.) (n es tamaño de la muestra).*

Nota 1.1. *Para cada $\omega \in \Omega$ tenemos que $X_i(\omega) := x_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \ldots, n$.* ***Notación:*** *X denota a la v.a. y x a la evalución de un punto muestral ω en X.*

Ejemplo 1.1. *Supongamos que se lanzan de forma independiente tres dados identificables. Sea $X_i =$ el resultado obtenido en el i-ésimo dado.*

Tenemos que la colección finita de v.a.i.i.d. X_1, X_2, X_3 es un m.a. de tamaño 3 con distribución Uniforme en $\{1, \ldots, 6\}$. Si se realiza el experimeto aleatorio y obtenemos $\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = 2$ entonces tenemos que $X_1(\omega_1) = x_1 = 4$, $X_2(\omega_2) = x_2 = 1$ y $X_3(\omega_3) = x_3 = 2$.

Suponemos que en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ están definidas todas las variables aleatorias consideradas en este documento.

Dada una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$, en muchos escenarios, nos gustaría ver si ésta converge a otra varibale aleatoria X, es decir, estamos interesados en saber si conforme n crece se acerca en algún sentido a X.

Suponga que estamos interesados en conocer información (su valor, distribución, etc) de una variable aleatoria X pero no podemos observarla directamente. Sin embargo, es posible realizar algunos experimentos y mediciones para obtener una primera estimación X_1 de X. Después, basados en la primera estimación, se realizan más experimentos y mediciones para actualizar y mejorar la estimación, denotemos por X_2 a la segunda estimación de X. Si continuamos con este proceso para actualizar la estimación obtenemos $\{X_n\}_{n\geq 1}$ y a medida n aumenta la estimación de X es mejor, es decir, no vamos acercando a X o la sucesión converge a X.

En este documento se presentan los conceptos teóricos para estudiar la convergencia de una sucesión de variables aleatorias. Se definen diferentes tipos de convergencia las cuales interpretaremos como diferentes formas en que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ se acerca (converge) X. Además, presentaremos las relaciones entre los diferentes tipos de convergencia e ilustrareos con ejemplos. Además discutiremos 2 teoremas de límites, Los teoremas de límite se encuentran entre los resultados más fundamentales en la teoría de probabilidad, la ley de los grandes números y el teorema del límite central.

2. Tipos de Convergencia en Variables Aleatorias

2.1. Convergencia casi segura.

Definición 2.1. *La sucesión de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *converge casi segura (c.s.) o casi dondequiera a la variable aleatoria* X *si*

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}] = 1.$$

Denotamos este tipo de convergencia por $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

Ejemplo 2.1. *Consideremos el espacio de probabilidad* $([0,1], \mathscr{B}[0,1], \mathbb{P}_u)$, *donde* $\mathbb{P}_u$ *es la medida uniforme, es decir,* $\mathbb{P}_u[(a,b)] = b-a$ *para cualesquiera reales* $0 \leq a \leq b \leq 1$. *Definimos una sucesión de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *por*

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & si \quad \omega \in [0, 1/n] \\ 0 & si \quad \omega \in (1/n, 1]. \end{cases}$$

En la Figura 1 se muestra la evolución de las variables aleatorias del Ejemplo **??** para $n = 1, \ldots, 6$.

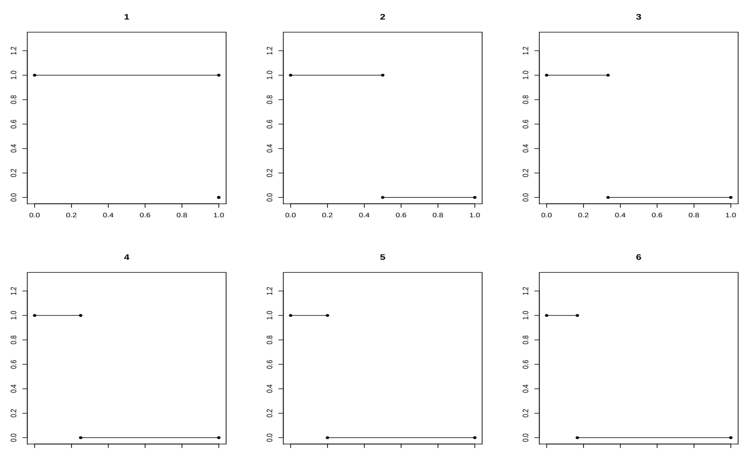

FIGURE 1. Gráfica de las variables aleatorias X_n $n = 1, 2, \ldots, 6$ del Ejemplo 2.1 para .

Desde que $\mathbb{P}_u[[0, 1/n]] = 1/n$, tenemos que cada v.a. $X_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$ entonces es natural afirmar que

$$X_n \xrightarrow{c.s.} 0.$$

La justificación de la afirmación anterior es

$$\mathbb{P}_u[\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\}] = \mathbb{P}_u[(0,1]] = 1,$$

y

$$\mathbb{P}_u[\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq 0\}] = \mathbb{P}_u[0] = 0.$$

Nota 2.1. *Dado que*

$$\lim_{n\to\infty} X_n(0) \neq 0,$$

X_n no converge puntualmente a 0.

Ejemplo 2.2. *Consideremos el experimento aleatorio de lanzar una moneda justa. El espacio muestral es $\Omega = \{a, s\}$. Definimos una secuencia de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ en este espacio muestral de la siguiente manera*

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & si \quad \omega = a \\ (-1)^n & si \quad \omega = s. \end{cases}$$

¿La sucesión del Ejemplo 2.2 converge c.s. a 1?

Ejercicio 2.1. *Consideremos el espacio de probabilidad* $([0,1], \mathscr{B}[0,1], \mathbb{P}_u)$. *Definimos una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ por*

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & si \quad \omega \in [0, (n+1)/2n) \\ 0 & si \quad \omega \in [(n+1)/2n, 1]. \end{cases}$$

(1) *Entontrar la v.a. X tal que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$,*
(2) *¿$X_n \to X$?*

2.2. **Convergencia en Probabilidad.** Una forma de interpretar la covergencia de una sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ a X es si la distancia entre X_n y X es cada vez más pequeña a medida que n crece. Si definimos la distancia entre las variables aleatorias X_n y X como

$$\mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon]$$

entonces tenemos el concepto de convergencia en probabilidad.

Definición 2.2. *La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en probabilidad a la variable aleatoria X si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega || X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}] = 0 \qquad para\ todo\ \ \varepsilon > 0.$$

Denotamos este tipo de convergencia por $X_n \xrightarrow{p} X$.

Ejemplo 2.3. *Sea $X_n \sim Exp(n)$, entonces $X_n \xrightarrow{p} 0$ desde que*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n - 0| > \varepsilon] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n > \varepsilon] \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-n\varepsilon} \\ &= 0, \qquad para\ todo\ \ \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

En la Figura 2 se ilustra la convergencia en probabilidad para el Ejemplo 2.3.

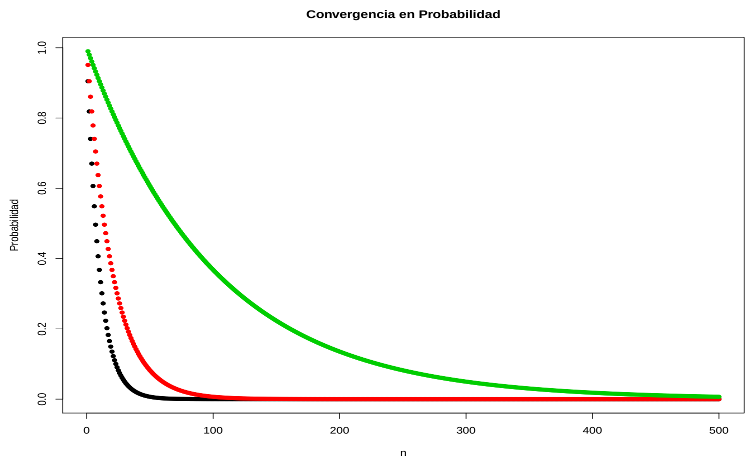

FIGURE 2. Gráfica de $P[X_n > \varepsilon]$ para $n = 1, \dots, 500$ y $\varepsilon_1 = 0.1$=negro,$\varepsilon_2 = 0.05$=rojo y $\varepsilon_3 = 0.01$=verde.

Ejercicio 2.2. *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d. tales que $X_n \sim N(0,1)$. Si definimos a*

$$S_n := \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n},$$

Use la desigualdad de Chebyshev para probar que

$$S_n \xrightarrow{p} 0.$$

2.3. **Convergencia en Distribución.** En esta sección definiremos el tipo de convergencia más débil.

Definición 2.3. *La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en distribución a la variable aleatoria X si*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

para toda x donde F_X es continua. Denotamos este tipo de convergencia por $X_n \xrightarrow{d} X$.

Ejemplo 2.4. *Sea $X_n \sim N(0, \sigma^2/n)$, entonces $X_n \xrightarrow{d} 0$ desde que*

$$F_{X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2 n/2\sigma^2} du.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 0 \\ 1/2 & si \;\; x = 0 \\ 1 & si \;\; x > 0. \end{cases}$$

Por otro lado $X = 0$ tiene función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 0 \\ 1 & si \;\; x \geq 0. \end{cases}$$

por lo que $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ *para todo punto donde* F_X *es continua.*

En la Figura 3 se ilustra la convergencia en distribución para el Ejemplo 2.4.

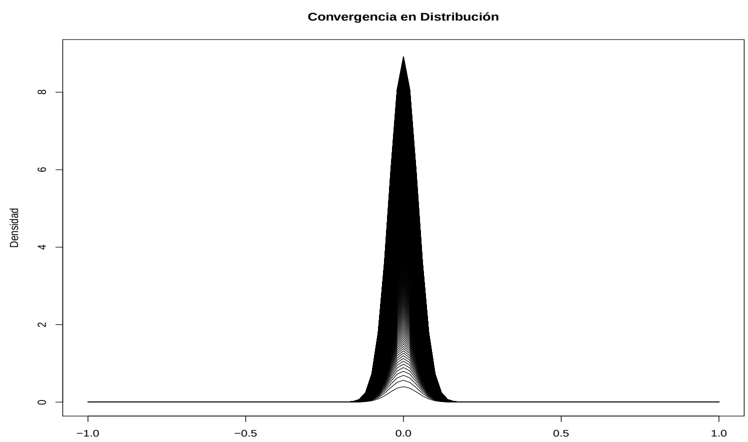

FIGURE 3. Gráfica de función de densidad del Ejemplo 2.4 para $n = 1,\ldots,500$ y $\sigma = 1$.

Ejercicio 2.3. *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de variables aleatorias tales que*

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nx} & si \;\; x > 0 \\ 0 & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Probar que $X_n \xrightarrow{d} X$ *donde* $X \sim Exp(1)$.

3. RELACIÓN ENTRE LOS TIPOS DE CONVERGENCIA

3.1. **Convergencia casi segura y convergencia en probabilidad.**

Proposición 3.1. *Convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad.*

Proof. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ y $\varepsilon > 0$. Consideramos la sucesión de eventos decrecientes $\{A_n\}_{n\geq 1}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$ el evento está definido por

$$A_n := \cup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| > \varepsilon\},$$

además definimos los eventos

$$B_n := \{|X_n - X| > \varepsilon\},$$

entonces, desde que $B_n \subset A_n$ tenemos que $\mathbb{P}[B_n] \leq \mathbb{P}[A_n]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[B_n] \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[A_n] \\
&= \mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} A_n] \qquad \text{por continuidad de la medida de probabilidad} \\
&= \mathbb{P}[\cap_{n=1}^{\infty} A_n] \\
&= \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon, \text{para toda } n \in \mathbb{N}] \\
&= \mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} X_n \neq X] \\
&= 0 \qquad \text{por convergencia c.s.}
\end{aligned}$$

□

Nota 3.1. *En general el reciproco de la Proposición 3.1 no es cierto.*

Ejercicio 3.1. *Considere la sucesión de variables aleatorias definidas por*

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1/n \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-1/n. \end{cases}$$

Probar que $X_n \xrightarrow{p} 0$ *pero no coverge c.s.*

3.2. **Convergencia en probabilidad y convergencia en distribución.**

Proposición 3.2. *Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución.*

Proof. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $X_n \xrightarrow{p} X$, F_X la función de distribución de X, x un punto de continuidad de F_X y $\varepsilon > 0$. Si definimos los eventos $A_n := \{|X_n - X| > \varepsilon\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(x) &= \mathbb{P}[X_n \leq x] \\
&= \mathbb{P}[X_n \leq x, A_n] + \mathbb{P}[X_n \leq x, A_n^c] \\
&\leq \mathbb{P}[X_n \leq x, A_n^c] + \mathbb{P}[A_n] \\
&= \mathbb{P}[X_n \leq x, |X_n - X| \leq \varepsilon] + \mathbb{P}[A_n] \\
&= \mathbb{P}[X_n \leq x, -\varepsilon \leq X_n - X \leq \varepsilon] + \mathbb{P}[A_n] \\
&= \mathbb{P}[X_n \leq x, X_n \leq \varepsilon + X, X \leq X_n + \varepsilon] + \mathbb{P}[A_n] \\
&\leq \mathbb{P}[X \leq x + \varepsilon] + \mathbb{P}[A_n] \qquad (1)
\end{aligned}$$

Entonces tomando limsup en la expresión (1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\mathbb{P}[X \leq x + \varepsilon] + \mathbb{P}[A_n]\right) \\
&= F_X(x+\varepsilon) \qquad \text{por convergencia en probabilidad} \\
&= F_X(x) \qquad \text{por continuidad en } x \qquad (2)
\end{aligned}$$

TABLE 1. Realción entre tipos de convergencia

Convergencia	C.S.	Probabilidad	Distribución
C.S.	$\Longleftrightarrow$	$\Longrightarrow$	$\Longrightarrow$
Probabilidad	$\not\Longrightarrow$	$\Longleftrightarrow$	$\Longrightarrow$
Distribución	$\not\Longrightarrow$	$\not\Longrightarrow$	$\Longleftrightarrow$

Por otro lado

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_X(x-\varepsilon) \qquad \text{por continuidad en } x \\ &= \mathbb{P}[X \le x-\varepsilon, A_n] + \mathbb{P}[X \le x-\varepsilon, A_n^c] \\ &\le \mathbb{P}[X_n \le x] + \mathbb{P}[A_n] \\ &= F_{X_n}(x) + \mathbb{P}[A_n] \end{aligned}$$

Tomando liminf en la expresión (3) tenemos

$$\begin{aligned} F_X(x) &\le \liminf_{n\to\infty} (F_{X_n}(x) + \mathbb{P}[A_n]) \\ &= \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \qquad \text{por convergencia en probabilidad} \end{aligned} \tag{3}$$

De (2) y (3) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

para x un punto de continuidad de X.

$\square$

Nota 3.2. *En general el reciproco de la Proposición 3.2 no es cierto.*

Ejemplo 3.1. *Sea $X \sim N(0,1)$ y una sucesión de variables aleatorias definidas por*

$$X_n(\omega) = \begin{cases} X & si \quad n \quad es\ par \\ -X & si \quad n \quad es\ impar. \end{cases}$$

Desde que la función de densidad de X es par tenemos que $X_n \sim N(0,1)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{d} X$. Por otro lado, dada $\varepsilon > 0$ y n impar tenemo que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[2|X| > \varepsilon] > \frac{1}{2} > 0,$$

por lo que X_n no converge en probalidad a X.

3.3. **Tabla de relaciones de tipo de convergencia.** En la Tabla 1 se muestra la relación entre los distintos tipos de convergencia.

4. TEOREMAS LÍMITE

En esta sección abordaremos la ley de los grandes números (LGN) y el teorema del límite central (TLC) que son dos de los resultados teóricos de mayor impacto en las áreas de probabilidad y estadística.

4.1. Leyes de los Grandes Números.

Definición 4.1. *Sea $X_1,\dots,X_n$ una muestra aleatoria. Definimos a la media muestral como la varible aleatoria*

$$S_n := \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Nota 4.1. *Sea $X_1,\dots,X_n$ una muestra aleatoria tal que $\mathbb{E}[X_1]=\mu<\infty$ y $Var[X_1]=\sigma^2<\infty$. Si*

$$Z_n := \frac{S_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

entonces

(1) $\mathbb{E}[S_n]=\mu$,
(2) $Var[S_n]=\frac{\sigma^2}{n}$,
(3) $\mathbb{E}[Z_n]=0$,
(4) $Var[Z_n]=1$.

Existe dos versiones de LGN, la interpretación de ambas es que si se realiza un experimento aleatorio una cantidad suficientemente grande de veces y se promedia el restultado, éste convege a la media de la variable aleatoria que modela el experimento. La diferencia entre las versiones de la LGN es el tipo de convergencia que es consecuencia de las distintas hipótesis en cada una de las leyes.

Teorema 4.1. ***Ley Débil de los Grandes Números (LDGN)***
Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias independientes con $\mathbb{E}[X_i]=\mu<\infty$ y $Var[X_i]=\sigma^2<\infty$ para toda $i=1,\dots,n$, entonces

$$S_n \xrightarrow{p} \mu.$$

Proof. Sea $\varepsilon>0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[|S_n-\mu|\le\varepsilon] &\le \lim_{n\to\infty}\frac{Var[S_n]}{\varepsilon^2} && \text{por desigualdad de Chebyshev}\\
&\le \lim_{n\to\infty}\frac{Var[X_1]}{n\varepsilon^2} && \text{por Nota 4.1}\\
&\le \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1. *Consideremos una colección $X_1,\dots,X_n$ de variables aleatorias independientes tales que $X_i\sim N(1/2,1/4)$ si i es par y $X_i\sim Bernoulli(1/2)$ si i es impar. Tenemos que $\mathbb{E}[X_i]=1/2$ y $Var[X_i]=1/4$ para todo $i=1,\dots,n$. Entonces por la LDGN $S_n\xrightarrow{p}1/2$.*

En la Figura 4 se puede ver la convergencia de S_n del Ejemplo 4.1a la variable aleatoria $X=1/2$.

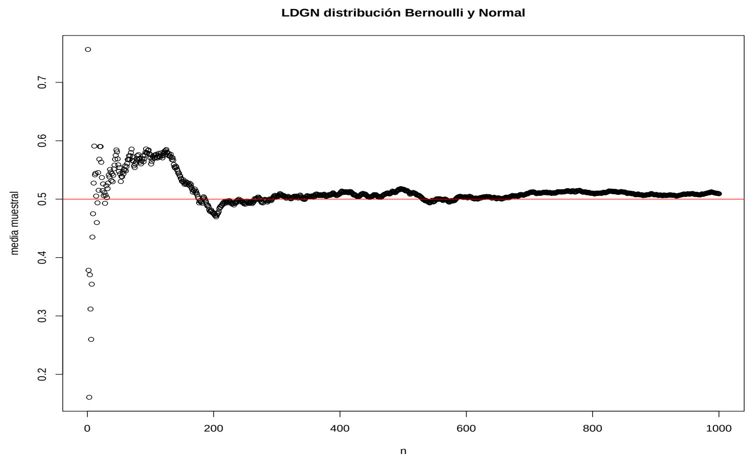

FIGURE 4. Grafica de S_n del Ejemplo 4.1 para $n = 1, 2, \dots, 1000$.

Teorema 4.2. ***Ley Fuerte de los Grandes Números (LFGN)***
Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. con $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$, entonces

$$S_n \xrightarrow{c.s.} \mu.$$

Ejemplo 4.2. *Consideremos una la m.a. $X_1, \dots, X_n$ tales que $X_i \sim U(0,1)$, entonces $\mathbb{E}[X_i] = 1/2$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por la LFGN $S_n \xrightarrow{c.s.} 1/2$.*

En la Figura 5 se puede ver la convergencia de S_n del Ejemplo 4.2 a la variable aleatoria $X = 1/2$.

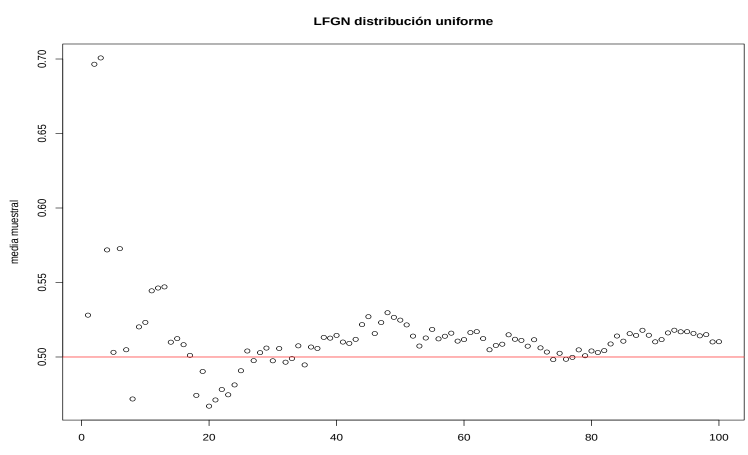

FIGURE 5. Gráfica de las variables aleatorias S_n Ejemplo 4.2 para $n = 1, 2, \dots, 10, 100$.

4.2. **Teorema del Límite Central.** El TLC establece que, bajo ciertas condiciones, la suma de una cantidad suficientemente grande de variables aleatorias converge en distribució a una variable aleatoria Normal.

Teorema 4.3. ***Teorema de Límite Central***
Sean $X_1, \dots, X_n$ una m.a. con $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$ y $Var[X_1] = \sigma^2 < \infty$. entonces

$$Z_n \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Ejemplo 4.3. *Consideremos una la m.a. $X_1, \dots, X_n$ tales que $X_i \sim U(0,1)$, entonces $\mathbb{E}[X_i] = 1/2$ y $Var(X_i) = 1/12$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por el TLC $Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$.*

En la Figura 6 se puede ver la convergencia de Z_n del Ejemplo 4.3 a una Normla Estandar.

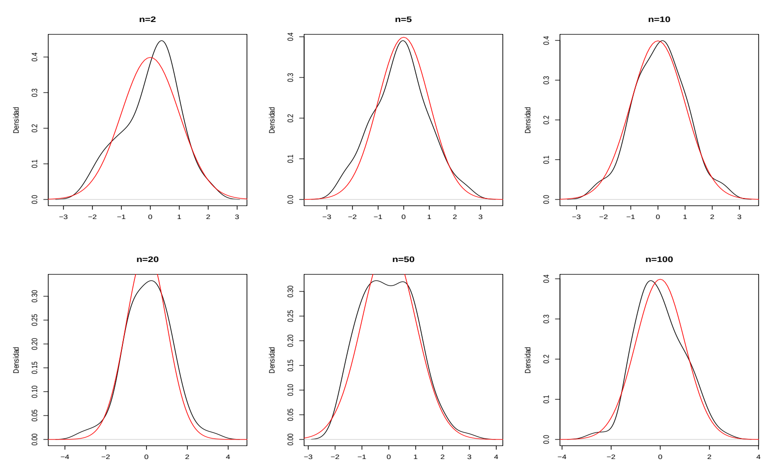

FIGURE 6. Gráfica de las densidades de Z_n Ejemplo 4.3 para $n = 2, 5, 10, 20, 50, 100$.

El TLC es un resultado muy importante por la cantidad de aplicaciones reales que tiene debido a que en muchos escenarios la variable aleatoria de interés se puede ver como la suma de un gran número de variables aleatorias independientes. Algunas de las áreas donde se aplica el TLC son:

(1) En laboratorios de prueba, los errores de medición de laboratorio generalmente se modelan mediante variables aleatorias normales.
(2) En telecomunicaciones y el procesamiento de señales, modelar el ”ruido” por medio de un ruido Gaussinao es lo más usual.
(3) En finanzas, los cambios porcentuales en los precios de algunos activos a veces se modelan mediante variables aleatorias normales.
(4) En Inferencia Estadística para sustentar las propieadades y eficiencia de los estimadores.

Algorithm 1 Teorema del Límite Central

1: Escribir a la variable aleatoria de interés Z como la suma de v.a.i.i.d.

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

donde $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ y $Var[X_i] = \sigma^2$

2: Encontrar la $\mathbb{E}[Z] = n\mu$ y $Var[Z] = n\sigma^2$.

3: Concluir que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[z_1 \leq Z \leq z_2] &= \mathbb{P}\left[\frac{z_1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{Z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{z_2 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] \\
&\approx \Phi\left(\frac{z_2 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{z_1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Donde $\Phi(x) = F_X(x)$ para $X \sim N(0,1)$.

Ejercicio 4.1. *Suponga que el tiempo de atención de un cajero de banco para cada cliente $i = 1, \ldots, n$ es una variable aleatoria X_i tal que $\mathbb{E}[X_i] = 3$ y $Var[X_i] = 1$. Si suponemos que los tiempos de servicio son independientes y Z es el tiempo tola de atención a 100 clientes, encontrar* $\mathbb{P}[290 \leq Z \leq 310]$.