Teoría del Riesgo

Fernando Baltazar-Larios

20 de febrero de 2023

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la Teoría del Riesgo

En este capítulo se presenta una introducción al concepto de riesgo en seguros.

1.1. Conceptos Básicos

Definición 1.1 *El riesgo es la posibilidad de que ocurra un cierto evento y los efectos que tiene dicha ocurrencia.*

Estamos interesados en identificar riesgos para tomar una decisión: aceptarlos o no. Por la naturaleza humana de ser adverso a los riesgos, se busca la manera de transferir dicho riesgo y es entonces donde tiene lugar el concepto de seguro.

Definición 1.2 *Un seguro es un contrato donde la aseguradora se compromete a cubrir ciertos gastos contingentes a cambio de cobrar una prima al asegurado.*

En este texto nos enfocaremos a estudiar los riesgo desde el punto de vista de las compañías aseguradoras.

Para el cálculo adecuado de sus riesgos, una compañía aseguradora necesita tener un portafolio grande de clientes similares y así poder medir con certeza el riesgo involucrado y el fundamento matemático de esto es la Ley de los Grandes Números. Además, existen requisitos mínimos para la reserva de la compañía (ley) que garantizan su solvencia.

1.2. Razones para asegurar

Generalmente, una compañía aseguradora cobra, por concepto de prima, una cantidad por arriba del riesgo esperado para gastos administrativos,ganancias y reserva, aún así el asegurado desea el seguro y el fundamento son las funciones de utilidad, pues los asegurados potenciales son adversos a riesgos grandes.

Definición 1.3 *Una* ***función de utilidad*** *es una función* $u : [a, b] \to \mathcal{R}$*, creciente y cóncava*

Ell objetivo de usar funciones de utilidad es medir la percepción de la riqueza en términos de la escala lineal monetaria y éstas explican como es posible que ambas partes en un contrato de seguro salgan beneficiadas.

Sea X un riesgo con función de distribución F, densidad f y pérdida esperada $E[X]$. Si la persona expuesta al riesgo tiene un capital C entonces la utilidad esperada es

$$E[u(C-X)] = \int_0^\infty u(C-x)f(x)dx.$$

Si una cía aseguradora acepta el riesgo por una prima p, el asegurado debe aceptar si (adverso al riesgo)

$$u(C-p) \geq E[u(C-X)]$$

entonces $E[X] = p$ es aceptable.

1.2.1. Modelo de Cramér-Lundberg

El ejemplo básico en el estudio del flujo del capital de una compañía aseguradora es el modelo clásico de Cramér-Lundberg. Este modelo tiene sus orígenes en la tesis doctoral de Filip Lundberg defendida en el año de 1903. En este trabajo Lundberg analiza el reaseguro de riesgos colectivos y presenta el proceso de Poisson compuesto. En 1930 Harald Cramér retoma las ideas originales de Lundberg y las pone en el contexto de los procesos estocásticos. El modelo ha sido estudiado en extenso y se han propuesto varias formas de generalizarlo.

El modelo clásico de Cramér-Lundberg es el proceso a tiempo continuo $\{C_t : t \geq 0\}$ dado por

$$C_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

donde:

- u es el capital inicial de la compañía aseguradora
- ct es la entrada por primas hasta el tiempo t con c una constante positiva
- Y_j es el moneto de la $j-$ésima reclamación, y
- N_t es un proceso de Poisson de parámetro λ

La variable C_t representa el balance más sencillo de ingresos menos egresos de una compañía aseguradora. Al proceso C_t se le llama proceso de riesgo. Las siguientes son algunas observaciones importantes.

- La variable aleatoria C_t se puede interpretar como el capital de la compañía aseguradora al tiempo t y por razones naturales y legales es importante que C_t permanezca por arriba de cierto nivel mínimo

- Cuando $C_t < 0$ se dice que hay ruina. La ruina casi nunca sucede en la práctica, es solamente un término técnico que produce alguna toma de decisión

- Por ejemplo, si el capital de una compañía aseguradora asignado a una cartera decrece en forma significativa, ésta automáticamente puede tomar ciertas medidas para subsanar esta situación y no se trata de un evento insalvable.

1.3. Concepto de Teoría del Riesgo

Definición 1.4 *La Teoría del Riesgo es la parte probabilistica de seguros que se ocupa de los modelos estocásticos en el flujo de pagos en un contrato de seguros.*

En el desarrollo de este trabajo nos enfocaremos en describir modelos básicos para los procesos de riesgo y obtener leyes (asintóticas) para las fluctuaciones en la cantidad de pérdida, su dependencia con variables como el capital, prima, tamaño del portafolio y la distribución de las variables.

En un contrato de seguros y en la posición de asegurador existen, al menos, dos tipos de riesgo; el riesgo del seguro y la incertidumbre sobre el cobro de la prima. En este trabajo nos concentraremos en el estudio del primer riesgo asumiendo certeza en el cobro de la prima.

Capítulo 2

Modelos de Riesgo

En este capítulo se presentan los principales métodos para modelar el riesgo en seguros (individuales y colectivos). Estudiar el riesgo cuando se presenta reaseguro, encontrar la distribución del riesgo bajo distintos escenarios, aprender a aproximar el riesgo y presentar las bases para el cálculo de las primas en un escenario riesgoso de seguros. Trabajar bases de datos que permitan analizar, modelar y simular los conceptos presentados.

2.1. Introducción

Consideremos un contrato colectivo de seguros en $[0, T]$, N el número de reclamaciones y $Y_1, \ldots, Y_N$ los montos de las reclamaciones. Entonces

$$S = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

es el monto acumulado de reclamación. Suponemos que los montos de reclamaciones no se ven afectados por el número de reclamaciones, el monto de cada reclamación es independiente del monto de resto de las reclamaciones y que todas las reclamaciones son indistinguibles. En notación matemática tenemos:

- N y $(Y_1, \ldots, Y_N)$ son independientes.
- $Y_1, \ldots$ son independientes.
- $Y_1, \ldots$ tienen la misma distribución G.

Sea $M_Y(t) = E[e^{rY_i}]$ y $\mu_n = E[Y_i^n]$, entonces

$$P[S \leq x] = E[P[S \leq x|N]] = \sum_{n=o}^{\infty} P[N = n]G^{*n}(x).$$

Tenemos una expresión explicita de la función de distribución del riesgo, pero en función de la n-ésima convolución de la función de distribución del monto de reclamaciones y como en general trabajar con estas convoluciones no resulta tarea fácil, debemos buscar caminos alternos para caracterizar la distribución del riesgo.La siguiente proposición presenta algunas características de la distribución del riesgo.

Proposición 2.1 *Sea S el monto de reclamación acumulada, tenemos que:*

1. $E[S] = E[N]\mu_1$
2. $E[S^2] = E[N^2]\mu_1^2 + E[N](\mu_2 - \mu_1^2)$
3. $Var[S] = Var[N]\mu_1^2 + E[N]Var[Y_1]$
4. $M_S(t) = M_N(log(M_Y(t)))$

Demostración:

1. $E[S] = E[E[\sum_{i=1}^{N} Y_i|N]] = E[[\sum_{i=i}^{N} \mu_1] = E[N\mu_1] = E[N]\mu_1$
2. $$\begin{aligned} E[S^2] &= E[E[(\sum_{i=1}^{N} Y_i)^2|N]] \\ &= E[E[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Y_iY_j|N]] \\ &= E[N\mu_2 + N(N-1)\mu_1^2] \\ &= E[N^2]\mu_1^2 + E[N](\mu_2 - \mu_1^2) \end{aligned}$$
3. Se sigue inmediatamente de las anteriores haciendo
$$Var[S] = E[S^2] - E^2[S]$$
4. $$\begin{aligned} M_S(t) &= E[e^{(t\sum_{i=1}^{N} Y_i)}] = E[\prod_{i=1}^{N} e^{tY_i}] = E[E[\prod_{i=1}^{N} e^{tY_i}|N]] \\ &= E[\prod_{i=1}^{N} M_Y(t)] = E[(M_y(t))^N] = M_N(log(M_Y(t))\Box. \end{aligned}$$

El coeficiente de asimetría $E[(S - E[S])^3]/(Var(S)^{3/2}$ puede ser calculado utilizando a $M_S(t)$.

Ahora desarrollaremos modelos bajo diferentes distribuciones para la variable aleatoria que modela el número de reclamaciones.

2.2. Modelo Binomial Compuesto

Para desarrollar este modelo consideremos las siguientes suposiciones:

- El riesgo consiste de varios riesgos ($n \in \mathbb{N}$) independientes e identicamente distribuidos.
- Hay a lo más una reclamación en cada riesgo en el tiempo de cobertura.
- El intervalo de tiempo de cobertura puede ser subdividido en intervalos más pequeños que sean independientes e intercambiables.
- La probabilidad de que se presente la reclamación en cada riesgo es $p \in (0,1)$.

Entonces podemos suponer que:

$$N \sim Bin(n,p)$$

Proposición 2.2 *Características del modelo binomial compuesto:*

1. $E[S] = np\mu_1$
2. $Var[S] = np(\mu_2 - p\mu_1^2)$
3. $M_S(t) = (p(M_Y(t)) + 1 - p)^n$

La proposición se sigue sustituyendo los valores correspondientes a una distribución binomial en la Proposición 2.1.

Una observación importante sobre la forma de la distribución de S es que asimétrica a la izquierda para $p \in (0, 1/2)$), simétrica para $p = 1/2$ y asimétrica a la derecha para $p \in (1/2, 1)$. Lo anterior se sigue del cálculo del coeficiente de asimetría.

2.3. Modelo Poisson Compuesto

Además de los supuestos del modelo anterior, asumiendo que n es grande y p pequeña y definiendo $\lambda = np$, se tiene que

$$Bin(n,p) \to Pois(\lambda),$$

cuando $n \to \infty$. Entonces resulta que podemos suponer que

$$N \sim Pois(\lambda).$$

Proposición 2.3 *Características del modelo Poisson compuesto*

1. $E[S] = \lambda\mu_1$

2. $Var[S] = \lambda\mu_2$
3. $M_S(t) = \exp[\lambda(M_Y(t) - 1)]$

La proposición se sigue sustituyendo los valores correspondientes a una distribución Poisson en la Proposición 2.1.

Es importante mencionar que bajo la hipótesis de distribución Poisson, S siempre es asimétrica a la izquierda.

Ejemplo 2.3.1 *Suponga que la distribución del monto de reclamaciones en un seguro de robo de auto siguen una distribución $LN(\mu, \sigma^2)$.*

2.4. Modelo Poisson Compuesto Mezclado

Consideremos el modelo Poisson compuesto y supongamos que λ es estocástica con distribución H. Entonces:

$$P[N = n] = \int_0^\infty \frac{l^n e^{-l}}{n!} dH(l).$$

En este caso tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.4
$E[S] = E[\lambda]\mu_1$
$E[S^2] = E[\lambda^2]\mu_1^2 + E\lambda]\mu_2$
$Var[S] = Var[\lambda]\mu_1^2 + E\lambda]\mu_2$
$M_S(t) = M_\lambda(M_Y(t) - 1)$

Demostración

1. $E[S] = E[E[S|\lambda]] = E[\lambda\mu] = E[\lambda]\mu_1$
2. $E[S^2] = E[E[S^2|\lambda]] = E[\lambda\mu_2 + \lambda^2\mu_1^2] = E[\lambda^2]\mu_1^2 + E\lambda]\mu_2$
3. Es directa de los dos puntos anteriores
4. $M_S(t) = E[E[e^{tS}|\lambda]] = E[exp\lambda(M_Y(t) - 1)] = M_\lambda(M_Y(t) - 1)$ □

Modelo Binomial Negativo

Supongamos que $\lambda \sim Gama(\alpha, \beta)$. Entonces

$$M_N(t) = M_\lambda(e^t - 1) = [\frac{\beta}{\beta - (e^t - 1)}]^\alpha = [\frac{\frac{\beta}{\beta+1}}{1 - (1 - \frac{\beta}{\beta+1})e^t}]^\alpha.$$

De donde se sigue que $N \sim BinNeg(\alpha, p)$ con $p = \beta/(\beta + 1)$ y se usa para periodos de tiempo largos.

2.4.1. Modelo Individual

Suponemos que el portafolio consiste de m contratos individuales $\{S^i\}_{i=1}^m$. Puede existir a lo más una reclamación en cada contrato y ésta tiene probabilidad de reclamación p^i. La variable aleatoria que modela el monto de reclamación del i-ésimo contrato dada por $Y^i \sim$ tiene como función de distribución a F^i y función generadora de momentos $M^i(t)$.

Sea $\lambda = \sum_i p^i$ entonces la función generadora de momentos del portafolio de reclamaciones o el riesgo acumulado está dada por

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{m}(1 + p^i(M^i(t) - 1)).$$

Es importante observar que el término $p^i(M^i(t) - 1)$ e pequeño para t grande y si consideramos

$$\log(M_S(t)) = \sum_{i=1}^{m} \log(1 + p^i(M^i(t) - 1)). \tag{2.1}$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} p^i(M^i(t) - 1) = \lambda(\sum_{i=1}^{m} \frac{p^i}{\lambda}(M^i(t) - 1)), \tag{2.2}$$

tenemos que en la última igualdad aparece el logaritmo de la función generadora de momentos de una distribución Poisson, lo cual justifica la popularidad del modelo Poisson compuesto.

2.5. Fórmula de Panjer

Supongamos que el tamaño de las reclamaciones $\{Y_i\}$ siguen una distribución discreta y por tanto S también. Además consideremos que

- $P[Y_i \in \mathbb{N}] = 1$
- $p_k = P[N = k]$
- $f_k = P[Y_i = k]$
- $g_k = P[S = k]$
- $f_0 = 0$

De los supuestos anteriores y la notación introducida tenemos que $g_0 = p_0$ y $f_k^{*n} = P[Y_1 + \ldots + Y_k = k]$ es la convolución de la distribución de un riesgo con n reclamaciones y como $f_k^{*n+1} = \sum_{i=1}^{k-1} f_i^{*n} f_{k-i}$ se tiene que

$$g_n = P[S = n] = E[P[S_n|N]] = \sum_{k=1}^{n} p_k f_k^{*n}.$$

De esta forma tenemos una fórmula explicita para la distribución de S pero el punto es que f_k^{*n} no es fácil de calcular. Para resolver este problema haremos supuestos sobre N.

Primero suponemos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$p_k = (a + \frac{b}{k})p_{k-1}$$

Proposición 2.5 *Las únicas variables aleatorias que satisfacen la expresión anterior y sus respectivos valores de a y b son:*

- *Si $N \sim Bin(n,p)$ entonces $a = -\frac{p}{1-p}$ y $b = \frac{(n+1)p}{1-p}$*
- *Si $N \sim Pois(\lambda)$ entonces $a = 0$ y $b = \lambda$*
- *Si $N \sim BinNeg(m,p)$ entonces $a = 1-p$ y $b = (m-1)(1-p)$*

Lema 2.1 *Sea $n \geq 2$, entonces*

1. $E[Y_1|\sum_{i=1}^n Y_i = k] = \frac{k}{n}$
2. $p_n f_k^{*n} = \sum_{m=1}^{k-1}(a + \frac{bm}{k})f_m p_{n-1} f_{k-m}^{*(n-1)}$

Demostración:

1. $E[Y_1|\sum_{i=1}^n Y_i = k] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E[Y_j|\sum_{i=1}^n Y_i = k] = \frac{k}{n}$
2.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{k-1}(a + \frac{bm}{k})f_m p_{n-1} f_{k-m}^{*(n-1)} &= p_{n-1}\sum_{m=1}^{k}(a + \frac{bm}{k})f_m f_{k-m}^{*(n-1)} \\
&= p_{n-1}\sum_{m=1}^{k}(a + \frac{bm}{k})P[Y_1 = m, \sum_{j=2}^{n} Y_j = k-m] \\
&= p_{n-1}\sum_{m=1}^{k}(a + \frac{bm}{k})P[Y_1 = m, \sum_{j=1}^{n} Y_j = k] \\
&= p_{n-1}\sum_{m=1}^{k}(a + \frac{bm}{k})P[Y_1 = m|\sum_{j=1}^{n} Y_j = k]f_k^{*n} \\
&= p_{n-1}E[a + \frac{bY_1}{k}|\sum_{j=1}^{n} Y_j = k]f_k^{*n} \\
&= p_{n-1}(a + \frac{b}{n})f_k^{*n} \\
&= p_n f_k^{*n}
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.6 ***Fórmula de Panjer***

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} (a + \frac{bi}{k}) f_i g_{r-i}$$

Esta proposición se sigue inmediatamente del lema anterior.

2.6. Métodos de Aproximación

Como hemos visto hasta ahora, encontrar una forma explicita para distribución de S no es, en general, tarea fácil. En esta sección estudiaremos algunas técnicas de aproximación a la distribución del riesgo acumulado bajo diferentes hipótesis.

Aproximación Normal

Si el número de reclamaciones es lo suficientemente grande podemos aproximar a S por medio de una distribución normal. Supongamos que Z sigue una distribución normal entonces

$$P[S \leq x] \approx P[Z \leq x] = \Phi(\frac{x - E[N]\mu}{\sqrt{Var[N]\mu^2 + E[N](\mu_2 - \mu^2)}}.$$

Observaciones

- La distribución tiene como soporte a los reales, entonces se debe considerar una aproximación para los cuales la probabilidad para valores negativos sea despreciable
- Generalmente las distribuciones de pérdidas están sesgadas y la distribución normal no tiene sesgo, por lo que la aproximación está en función del sesgo.

Aproximación Gamma Trasladada

Este método propone aproximar S por $r + Z$, con $r \in \mathbb{R}$ y $Z \sim Gama(\alpha, \beta)$. Se deben seleccionar adecuadamente los parámetros. Suponiendo que tenemos a

- $E[S] = m$
- $Var[S] = \sigma^2$
- $\frac{E[(S-E[S])^3]}{Var^{3/2}[S]} = \eta$

conocidas o estimadas y los valores correspondientes para la variable aleatoria $r + Z$

- $E[r + Z] = r + \frac{\alpha}{\beta}$

- $Var[r+Z] = \frac{\alpha}{\beta^2}$
- $\frac{E[(r+Z-E[r+Z])^3]}{Var^{3/2}[r+Z]} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$

Entonces igualando las expresiones correspondientes

1. $r = m - \frac{2\sigma}{\eta}$
2. $\alpha = \frac{4}{\eta^2}$
3. $\beta = \frac{2}{\sigma\eta}$

De esta forma tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.7 *El riesgo S tiene distribución aproximada*

$$m - \frac{2\sigma}{\eta} + Gama(\frac{4}{\eta^2}, \frac{2}{\sigma\eta}).$$

Observaciones

- Es importante ver está aproximación implica que $\beta > 0$
- Es posible que r sea negativa y provoque que se consideren valores negativos
- Esta aproximación no es fácil de calcular

2.7. Aproximación de Edgeworth

Definir $Z = \frac{S-E[S]}{\sqrt{Var[S]}}$. Supongamos que la función generadora de momentos de Z existe, entonces la serie de Taylor de $ln(M_Z(t))$ alrededor de cero es:

$$ln(M_Z(t)) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \frac{a_3}{3!}t^3 + \frac{a_4}{4!}t^4 \dots$$

donde $a_k = \frac{d^k}{dt^k} ln(M_Z(t))|_{t=0}$. La aproximación consiste en truncar la serie de Taylor hasta la cuarta potencia de t. Tenemos que la función generadora de momentos de Z puede ser escrita como

$$M_Z(t)) \approx e^{t/2} e^{a_3 t^3/6 + a_4 t^4/24} \approx e^{t/2}(1 + \frac{a_3 t^3}{3!} + \frac{a_4 t^4}{4!} + \frac{a_3^2 t^6}{72!})$$

Ahora la intención es saber cada término de la aproximación de que variable a aleatoria es función generadora de momentos. Con esta meta vamos a invertir cada término para encontrar la distribución correspondiente. Tenemos que

$$e^{t/2} = e^{t/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx == \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{tx} dx.$$

Entonces $e^{t/2}$ es la función generadora de momentos de una normal estándar. Por otro lado no es difícil demostrar que

$$t^n e^{t/2} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x) e^{tx} dx.$$

Entonces $t^n e^{t/2}$ es la transformada de Laplace de $(-1)^n \phi^{(n)}(x)$. De esta forma tenemos que

$$f_Z(z) \approx \phi(z) - \frac{a_3}{6}\phi^{(3)}(z) + \frac{a_4}{24}\phi^{(4)}(z) + \frac{a_3^2}{72}\phi^{(6)}(z).$$

Por tanto tenemos el siguiente resultado

Proposición 2.8 *La función de densidad de S con media m y varianza σ^2 bajo la aproximación de Edgerworth es*

$$f_S(x) \approx \frac{1}{\sigma}(\phi(\frac{x-m}{\sigma}) - \frac{a_3}{6}\phi^{(3)}(\frac{x-m}{\sigma}) + \frac{a_4}{24}\phi^{(4)}(\frac{x-m}{\sigma}) + \frac{a_3^2}{72}\phi^{(6)}(\frac{x-m}{\sigma}).$$

2.8. Reaseguro

Cuando el posible monto de reclamación implicito en un contrato de seguros es muy grandes la compañía aseguradora puede tomar la opción de compartir el riesgo por medio de un reaseguro. Sea S^A la parte del riesgo que toma la aseguradora y S^R la parte que transfiere a la reaseguradora. Tenemos que

$$S = S^A + S^R.$$

El reaseguro se puede presentar de manera individual o compuesto. En ambos casos el reaseguro se aplica con una función f, creciente con $f(0) = 0$ y $f(x) \leq x$ definida en $\mathbb{R} \cup 0$. Un reaseguro por reclamaciones individuales es:

$$S^A = \sum_{u=1}^{N} f(Y_i)$$

y

$$S^R = S - S^A.$$

Las formas más comunes de reaseguros son

1. Reaseguro proporcional:
$$f(x) = \alpha x$$
para $0 < \alpha < 1$.

2. Exceso de pérdida
$$f(x) = \text{mín}\{x, M\}$$
con $M > 0$.

Cuando se aplica al riesgo en su totalidad

$$S^A = f(S).$$

En este caso la forma más común es el reaseguro por pérdida excesiva.

Reaseguro Proporcional

Tenemos que $S^A = \alpha S$, entonces

1. $E[S^A] = \alpha E[S]$
2. $Var[S^I] = \alpha^2 Var[S]$
3. $M_{S^A}[t] = M_S[\alpha t]$

Observaciones:

1. La varianza es "considerablemente" menor
2. Sugiere que el riesgo se reduce:

$$P(S > p + u/\alpha),$$

donde p es la prima y u el capital inicial.

2.8.1. Reaseguro por pérdida excesiva

En este caso no es posible dar fórmulas explicitas como en el caso anterior, éstas deben ser calculadas de la función de distribución de

$$Y_i^A = \text{mín}\{Y_i, M\}.$$

Un indicador de que el riesgo para la compañía aseguradora disminuye es que el tamaño de las reclamaciones es acotado.

Ejemplo 2.8.1 *Sea S un riesgo con modelo Poisson compuesto de parámetro $\lambda > 1$ y $Y \sim Pa(\alpha, \beta)$, $f_Y(y) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha+1}}$. Calcularemos el valor esperado de las obligaciones de la compañía aseguradora.*

$$\begin{aligned}
E[Y^A] &= \int_0^M \frac{y\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha+1}}dy + \int_m^\infty \frac{M\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha+1}}dy \\
&= \int_0^M \frac{(y+\beta)\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha+1}}dy - \int_0^M \frac{\beta\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha+1}}dy + \frac{M\beta^\alpha}{(\beta+M)^\alpha} \\
&= \frac{\alpha\beta^\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\beta^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\beta+M)^{\alpha-1}}\right) - \beta^{\alpha+1}\left(\frac{1}{\beta^\alpha} - \frac{1}{(\beta+M)^\alpha}\right) + \frac{M\beta^\alpha}{(\beta+M)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$E[S^A] = \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta+M}\right)^{\alpha-1}\right)E[S].$$

Sea $N^R = \sum_{i=1}^N \mathbb{I}_{\{Y_i > M\}}$ el número de reclamaciones que paga la compañía aseguradora y $q = P[Y_i > M]$. ¿Cuál es la distribución de N^R ?

Observación: La función generadora de momentos de $\mathbb{I}_{\{Y_i > M\}}$ es $qe^t + 1 - q$. Entonces bajo diferentes distribuciones de N tenemos que

1. Si $N \sim Bin(n, p)$ entonces $N^R \sim Bin(n, pq)$
2. Si $N \sim Pois(\lambda)$ entonces $N^R \sim Pois(\lambda q)$
3. Si $N \sim BinNeg(m, p)$ entonces $N^R \sim BinNeg(m, \frac{p}{p+q-pq})$

2.9. Ejercicios

1. Encontrar la expresión de la aproximación Normal cuando N tiene distribución Poisson, Binomial y Binomial Negativa.
2. Suponer que $N \sim Poisson(10)$ y $Y \sim Pa(4, 2)$, encontrar una prima p talque $P[S > p] \leq 0{,}05$.

Capítulo 3

Principios para el Cálculo de Primas

Sea π la prima anual para un cierto riesgo y S_i las pérdidas en el i-ésimo año (v.ai.i.d.). Sea u el capital de la compañía aseguradora, entonces, después del i-ésimo año el capital es

$$X_i = u + \pi i - \sum_{j=1}^{i} S_j.$$

Cuando la compañía tiene un capital inicial u. Podemos observar de la expresión anterior que $\{X_i\}$ es una caminata aleatoria.

Lema 3.1 *Sean $\{S_i\}$ v.a.i.i.d. y $X_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$ con $X_0 = 0$ entonces*

- *Si $E[S] < 0$ entonces X_n converge a $-\infty$ c.s.*
- *Si $E[S] = 0$ entonces c.s. $\limsup_{n\to\infty} X_n = -\liminf_{n\to\infty} X_n = \infty$*
- *Si $E[S] > 0$ entonces X_n converge a ∞ c.s.*

Entonces para que la compañía sobreviva se necesita que $\pi > E[S_i]$. Lo cual es considerado un principio en el cálculo de la prima.

3.1. Principio del Valor Esperado

El principio más popular del cálculo de primas es

$$\pi = (1 + \theta)E[S]$$

donde $\theta > 0$ (safety loading).

Observaciones

- Fácil de calcular
- Asigna la misma prima a distintos riesgos (con la misma esperanza)
- No es sensible a distribuciones de colas pesadas

3.2. Principio de la Varianza y Desviación Estándar

Con la intención de considerar los riesgos altos se propone calcular la prima de las siguientes maneras

$$\pi = E[S] + \theta Var[S]$$

donde $\theta > 0$. Otra propuesta

$$\pi = E[S] + \theta\sqrt{Var[S]}$$

en este caso se puede escribir la pérdida como

$$\pi - S = \sqrt{Var[S]}(\theta - \frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}}).$$

Donde la pérdida estandarizada es la carga del riesgo menos una variable aleatoria con media cero y varianza uno.

3.3. Principio de Utilidad Cero

La motivación de este método es tratar de ponderar adecuadamente las diferentes pérdidas. En esta metodología se utiliza una función de utilidad con las siguientes características:

- $f(0) = 0$
- $f(x)$ es estrictamente creciente
- $f(x)$ debe ser cóncava.

El primer punto es por convencionalidad, el segundo punto es para garantizar que a menores pérdidas son preferidas y con el tercero se asigna mayor peso a pérdidas mayores.

La prima propuesta es la solución a la ecuación

$$f(u) = E[f(u + \pi - S)] \tag{3.1}$$

Con la expresión anterior se tiene que la utilidad esperada con un capital inicial u deber ser la misma que al considerar el riesgo.

Lema 3.2 *1. Si una solución a la ecuación (3.1) existe, entonces es única.*

2. Si $P[S = E[S]] < 1$ entonces $\pi > E[S]$.

3. La prima es independiente de u para todas las distribuciones de las pérdidas si y sólo si $f(x) = A(1 - e^{-\alpha x})$ con $A, \alpha > 0$.

Demostración

1. Sean $\pi_1 > \pi_2$ dos soluciones, entonces

$$f(u) = E[f(u + \pi_1 - S)] > E[f(u + \pi_2 - S)] = f(u)$$

.

2. $f(u) = E[f(u + \pi - S)] < f(u + \pi - E[S]) =$ entonces $u < u + \pi - E[S]$.

3. *a*) En clase

   b) Tenemos que

$$f(u) = A(1 - e^{-\alpha u}) = E[f(u + \pi - S)] = E[A(1 - e^{-\alpha(u+\pi-S)})]$$

entonces

$$\begin{aligned} A(1 - e^{-\alpha u}) &= E[1 - e^{-\alpha u} e^{-\alpha\pi} e^{\alpha S}] \\ 1 &= A e^{-\alpha\pi} E[e^{\alpha S}] \end{aligned}$$

□

3.4. Principio del Valor Medio

Se desea una prima que no dependa del capital inicial. La compañía aseguradora valora sus pérdidas y las compara con las pérdidas del cliente que paga sus primas. Como pérdidas grandes son menos deseables, se busca asignarles valores más altos, entonces la idea de este método es ordenar las preferencias relativas. Con este objetivo se considera una función con las siguientes características

1. $f(0) = 0$
2. Creciente
3. Estrictamente convexa

Se propone una prima que sea solución a la ecuación

$$f(\pi) = E[f(\pi)]$$

es decir

$$\pi = f^{-1}(E[f(S)]$$

de donde se puede ver que se satisface que $\pi > E[S]$ si $P[S = E[S]] < 1$.

3.5. Principio Exponencial

Sea $\alpha > 0$, seleccionamos la función de utilidad

$$f(x) = 1 - e^{-\alpha x}$$

entonces la prima obtenida es

$$\pi = \frac{ln(M_S(\alpha))}{\alpha}.$$

Observaciones:

- Para aplicarlo es necesaria la existencia de la función generadora de momentos de S
- Se puede hacer lo mismo en el principio del valor medio con $f(x) = e^{\alpha x} - 1$
- Es importante la dependencia de la prima con respecto al parámetro

Lema 3.3 *Para una variable aleatoria X con función generadora de momentos $M_X(t)$ la función $ln(M_X(t))$ es convexa. Si X no es determinista entonces $ln(M_X(t))$ es estrictamente convexa.*

Lema 3.4 *Sea $\pi(\alpha)$ la prima determinada por el principio exponencial. Si $M_S''(\alpha) < \infty$, la función $\pi(\alpha)$ es estrictamente creciente si S es no determinista.*

3.6. El principio de Esscher

Se utiliza una función de distribución G que esté relacionada con la función de riesgo F con la condición de dar más peso a pérdidas mayores. Dicha función de distribución es conocida como la transformada de Esscher y está dada por

$$G_\alpha(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{\alpha y} dF(y)}{M_S(\alpha)}$$

para $\alpha > 0$.

Si $\bar{S}$ es el riesgo asociado a $G_\alpha(x)$, bajo este principio la prima π debe ser calculada como la esperanza de $\bar{S}$, es decir,

$$\pi = \frac{E[Se^{\alpha S}]}{M_S(\alpha)}.$$

3.7. Propiedades Deseadas en un Principio para Calcular Primas

En esta sección se enlistan propiedades que deberían cumplir los métodos para el cálculo de primas.

1. Facilidad en el cálculo
2. Consistencia, en cuanto a ser sensible con respecto a las posibles variaciones del riesgo.
3. Aditividad, en el sentido que cuando el modelo consista en riesgos independientes, la prima debe ser la suma de las primas individuales.

Capítulo 4

Credibilidad

Supongamos que tenemos información de 10 años de 5 asegurados de autos. Con dicha información se tiene que algunos asegurados no han utilizado su seguro y les parece injusto tener que pagar la misma prima que las personas que han tenido varios accidentes. Si se realizan pruebas estadísticas se puede llegar a la conclusión que es muy poco probable que cada conductor tenga la misma probabilidad de tener un accidente el próximo año.

Dado que la compañía aseguradora busca atraer a los "buenos" riesgos, trata de asignar una prima de acuerdo a la experiencia particular de cada cliente. A este proceso se le llama Tasa de Experiencia o Credibilidad.

La teoría de la credibilidad la podemos entender como un conjunto de métodos pra el cálculo de las primas a través de la combinación de la experiencia individual y colectiva.

4.1. Credibilidad Completa

Sea S un cierto riesgo y $S_1, \ldots, S_n$ los montos de reclamaciones efectuadas en n periodos de vigencia por un asegurado (o un grupo de asegurados). Si las variables aleatorias $S_1, \ldots, S_n$ son independientes e identicamente distribuidas se tiene que la ley de los grandes números garantiza que

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{n} \to E(S).$$

La pregunta natural es ¿Qué valor de n es suficiente para que $\bar{S}$ esté considerablemente cercano a $E(S)$?

Definición 4.1 *Sea $k \in (0,1)$ y $p \in (0,1)$ dos números fijos. Se dice que $\bar{S}$ tiene credibilidad completa (k,p) si*

$$P[|\bar{S} - E[S]| \leq kE[S]] \geq p.$$

Nota 4.1 *Esta definición es válida para* $E[S] \neq 0$.

Siguiendo la definición anterior, se toman valores de k cercanos a cero y de p cercanos a uno ($k = 0{,}05$ y $p = 0{,}9$). De esta forma el problema se reduce a encontrar a n.

4.1.1. Hipótesis de Normalidad

Bajo el supuesto que $\bar{S}$ tiene una distribución aproximada normal se tiene que

$$P[|\bar{S} - E[S]| \leq kE[S]] \approx 2\Phi(\frac{kE[S]}{\sqrt{Var[S]/n}}) - 1.$$

De donde se sigue la siguiente desigualdad

$$\Phi(\frac{k\sqrt{n}E[S]}{\sqrt{Var[S]}}) \geq \frac{1+p}{2}.$$

Si a_q es el q-cuantil de la distribución normal, es decir $\Phi(a_q) = q$ entonces

$$n = \frac{a^2_{(1+p)/2} Var[S]}{k^2 E^2[S]}.$$

4.2. Credibilidad Parcial

En esta metodología se propone como estimador de $E[S]$ a

$$\alpha\bar{S} + (1-\alpha)E[S]$$

donde a α se le conoce como factor de credibilidad. Entonces la condición de credibilidad se reduce a

$$P[|\bar{S} - E[S]| \leq kE[S]/\alpha] \geq p.$$

Nota 4.2 *En este caso tenemos una credibilidad completa* $(k/\alpha, p)$.

4.2.1. Hipótesis de Normalidad

Bajo el supuesto que $\bar{S}$ tiene una distribución aproximada normal se tiene que

$$P[|\bar{S} - E[S]| \leq kE[S]/\alpha] \approx 2\Phi(\frac{kE[S]}{\sqrt{Var[S]/n}}) - 1.$$

De donde se sigue la siguiente desigualdad

$$\Phi(\frac{k\sqrt{n}E[S]}{\alpha\sqrt{Var[S]}}) \geq \frac{1+p}{2}.$$

Si a_q es el q-cuantil de la distribución normal, es decir $\Phi(a_q) = q$ entonces

$$n = \frac{\alpha^2 a^2_{(1+p)/2} Var[S]}{k^2 E^2[S]}.$$

Con la condición que

$$\alpha = \text{mín}\{\frac{k^2 E^2[S]}{a^2_{(1+p)/2} Var[S]}, 1\}$$

4.3. Credibilidad Bayesiana

Sea Y_{ij} las pérdidas del $i-$ésimo riesgo en el $j-$ésimo año con $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$. Denotemos la pérdida media del $i-$ésimo riesgo por

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Y_{ij}.$$

Considerando las siguientes hipótesis

1. Existe un parámetro θ_i perteneciente al $i-$ésimo riesgo y $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ v.a.i.i.d.
2. Para i fijo, las variables $Y_{i1} \ldots, Y_{im}|\theta_i$ son v.a.i.i.d.
3. Los vectores $(Y_{i1} \ldots, Y_{im}, \theta_i)$ son i.i.d.

Si denotamos por

$$m(k) = E[Y_{ij}|\theta_i = k],$$
$$\mu = E[m(\theta_i)]$$

y

$$s^2(k) = Var[Y_{ij}|\theta_i = k].$$

En esta metodología se buscan formas de estimar a $m(\theta_i)$.

Supongamos que conocemos la distribución de θ_i y la distribución de $Y_{ij}|\theta_i$. Debemos encontrar el mejor estimador M_0 de $m(\theta_i)$ (en el sentido de error cuadrático medio), es decir,

$$E[(M - m(\theta_i))^2] \geq E[(M_0 - m(\theta_i))^2]$$

para todas las funciones medibles $M = M(Y_{i1} \ldots, Y_{im})$. Sea

$$M_0^* = E[m(\theta(\theta_i)|(Y_{i1} \ldots, Y_{im}],$$

entonces

$$\begin{aligned} E[(M - m(\theta_i))^2] &= E[((M - M_0^*) + (M_0^* - m(\theta_i)))^2] \\ &= E[(M - M_0^*)^2] + E[(M_0^* - m(\theta_i))^2] \end{aligned}$$

Nota 4.3 *Como el segundo término es independiente de la selección de M entonces el mejor estimador es $M_0 = M_0^*$ y es llamado **estimador de credibilidad Bayesiano**.*

4.3.1. Modelo Poisson-Gamma

En este modelo se supone que Y_{ij} tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro λ_i y la distribución del monto de reclamación es igual para todos los riesgos.

Nota 4.4 *Es suficiente estimar λ_i bajo el supuesto que el monto de cada reclamación es uno, es decir, $Y_{ij} = N_{ij}$.*

Con base en el modelo Binomial Negativo suponemos que $\lambda_i \sim \text{Gamma}(a, b)$. Sea

$$\bar{N}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} N_{ij}.$$

Para estimar λ_i consideramos tenemos que

$$E[\lambda_i | N_{i,1}, \ldots, N_{im}] = \frac{m}{m+b}\bar{N}_i + (1 - \frac{m}{m+b})E[\lambda_i] \tag{4.1}$$

El estimador es de la forma $\alpha\bar{N}_i + (1-\alpha)E[\lambda_i)$ donde α es llamado factor de credibilidad, que converge a uno conforme m crece. La única cuestión pendiente es la estimación de a y b.

4.3.2. Modelo Normal-Normal

En este modelo suponemos que cada riesgo se compone de una cantidad suficientemente grande de subriesgos de tal manera que las variables aleatorias Y_{ij} pueden ser consideradas como aproximaciones de una distribución normal. Además, se supone que las varianzas condicionales son iguales para todos los riesgos, entonces

$$Y_{ij} \sim N(\theta_i, \sigma)$$

y

$$\theta_i \sim N(\mu, \lambda^2).$$

Nota 4.5 *La selección de μ y λ^2 debe ser de tal forma que $P[Y_{ij} \leq 0]$ sea pequeña.*

Tenemos que la distribución conjunta está dada por

$$f_{Y_{i1},\ldots,Y_{im},\theta_i} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m+1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sigma}e^{-[\frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2} + \sum_{j=1}^{m}\frac{(y_{ij}-x)^2}{2\sigma^2}]}.$$

Sea $m\bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{m} Y_{ij}$ entonces

$$\frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2} + \sum_{j=1}^{m}\frac{(y_{ij}-x)^2}{2\sigma^2} \quad = \quad x^2(\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{m}{2\sigma^2}) - 2x(\frac{\mu}{2\lambda^2} + \frac{m\bar{Y}_i}{2\sigma^2}) + \frac{\mu^2}{2\lambda^2} + \frac{m\bar{Y}_i}{2\sigma^2}.$$

Entonces

$$f_{Y_{ij},\ldots,Y_{im},\theta_i} = C(Y_{i1},\ldots,Y_{im})e^{-\frac{(x-(\frac{\mu}{\lambda^2}+\frac{m\bar{Y}_i}{\sigma^2})(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{m}{\sigma^2})^{-1})^2}{2(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{m}{\sigma^2})^{-1}}},$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_i &= (\frac{\mu}{\lambda^2}+\frac{m\bar{Y}_i}{\sigma^2})(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{m}{\sigma^2})^{-1}. \\ &= \frac{m\lambda^2}{\sigma^2+m\lambda^2}\bar{Y}_i+(1-\frac{m\lambda^2}{\sigma^2+m\lambda^2})\mu \qquad (4.2)\end{aligned}$$

4.3.3. Credibilidad Empírica de Bayes

Es importante notar que para obtener el estimador de credibilidad bayesiana es necesario conocer la distribución conjunta de $(Y_{i1},\ldots,Y_{im},\theta_i)$ y ésta no siempre está disponible. A partir de aquí nos restringiremos a estimadores lineales, es decir, estimadores de la forma

$$M = a_{i0} + a_{i1}Y_{i1} + \ldots a_{i1}Y_{im},$$

y al mejor estimador le llamaremos **Estimador lineal de Bayes**.

Para estimadores de esta forma es suficiente conocer los dos primeros momentos de $(m(\theta_i), Y_{i*})$ los cuales vamos a estimar. Con este objetivo estimaremos la prima lineal de Bayes y los dos primeros momentos a los cuales se les conoce como **estimadores empíricos de Bayes**.

Modelo de Buhlman

Considerando la siguiente notación adicional $\sigma^2 = E[s^2(\theta_i)]$ y $v^2 = Var[m^2(\theta_i)]$. Tenemos que

$$E[Y_{ij}^2] = E[E[Y_{ij}^2|\theta_i]] = E[s^2(\theta_i)+m^2(\theta_i)] = \sigma^2 + E[m^2(\theta_i)],$$

entonces

$$Var[Y_{ij}] = \sigma^2 + v^2.$$

Buscamos los coeficientes a_{ij} que minimicen el error cuadrático medio, es decir,

$$E[(a_{i0}+\sum_{j=1}^{m} a_{ij}Y_{ij} - m(\theta_i))^2].$$

Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial a_{i0}} = 2E[a_{i0}+\sum_{j=1}^{m} a_{ij}Y_{ij} - m(\theta_i)],$$

entonces

$$a_{i0} = (1 - \sum_{j=1}^{m} a_{ij})\mu.$$

Por otro lado, para $1 \leq k \leq m$ y derivando con respecto a a_{ik} tenemos

$$\frac{\partial}{\partial a_{ik}} = 2E[Y_{ik}(a_{i0} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}Y_{ij} - m(\theta_i))].$$

Sabemos que

$$E[Y_{ik}^2] = \sigma^2 + v^2 + \mu^2,$$

$$E[Y_{ij}Y_{ik}] = E[[Y_{ij}Y_{ik}|\theta_i]] = E[m^2(\theta_i)] = v^2 + \mu^2$$

y

$$E[Y_{ij}m(\theta_i)] = E[E[Y_{ik}m(\theta_i)|\theta_i]] = E[m^2(\theta_i)] = v^2 + \mu^2.$$

Entonces las ecuaciones a resolver son

$$(1 - \sum_{j=1}^{m} a_{ij})\mu^2 + \sum_{j \neq k}^{m} a_{ij}(v^2 + \mu^2) + a_{ik}(\sigma^2 + v^2 + \mu^2) - v^2 - \mu^2.$$

entonces

$$\sigma^2 a_{ik} = v^2(1 - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}),$$

por lo tanto

$$a_{i1} = \ldots = a_{ik} = \frac{v^2}{\sigma^2 + mv^2}.$$

Y la prima por credibilidad es

$$\alpha \bar{Y}_i + (1 - \alpha)\mu$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{v^2 m}}.$$

Nota 4.6 *Sólo debemos encontrar estimadores de* μ, σ^2, v^2.

4.4. Ejercicios

1. Supongamos que las reclamaciones en cada periodo tienen distribución Poisson compuesta con parámetro λ y que cada reclamación individual sigue una distribución $exp(\alpha)$, dar valores a los parámetros y estimar n.

2. Demostrar que no siempre se puede escribir al estimador de credibilidad Bayesiana como una combinación lineal convexa de la media poblacional y muestral. Hint. θ_i tome dos valores con la misma probabilidad y $Y_{ij} \sim$ Poisson(θ_i).

Capítulo 5

Teoría de Ruina

Dar una introducción al problema de la ruina, desde enfoques a tiempo discreto y continuo. Presentar los resultados principales en el cálculo (o la estimación) de la probabilidad de ruina. Hacer estimación de la probabilidad de ruina basada en la simulación estocástica.

5.1. Proceso de Cramér-Lundberg

Está basado en el modelo del proceso Poisson compuesto. La idea de Filip Lundberg es combinar en un proceso estocástico continuo el monto total de reclamaciones, los ingresos por primas (continuas distribuidas uniformemente en el tiempo). Con esta idea propone el siguiente modelo para el capital de la compañía aseguradora $\{C_t : t \geq 0\}$ dado por

$$C_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

donde:

- u es el capital inicial de la compañía aseguradora
- ct es la entrada por primas hasta el tiempo t con c una constante positiva
- Y_j es el moneto de la $j-$ésima reclamación, y
- N_t es un proceso de Poisson de parámetro λ

Para una compañía aseguradora es importante que $\{C_t : t \geq 0\}$ se mantenga sobre cierto nivel. Ajustando al capital inicial, supongamos que ese nivel es cero, entonces definimos el tiempo de ruina por

$$\tau = \begin{cases} \inf\{t > 0 | C_t < 0\} & \text{si} \quad \{t > 0 | C_t < 0\} \neq \emptyset \\ \infty & \text{si} \quad \{t > 0 | C_t < 0\} = \emptyset \end{cases}$$

Estamos interesados en la probabilidad de ruina en un intervalo de tiempo $(0, t]$, es decir

$$\psi(u,t) = P[\tau \leq t | C_0 = u]$$

y la probabilidad de ruina definitiva dada por

$$\psi(u) = \lim_{t\to\infty} = \psi(u,t).$$

Denotemos por T_i al tiempo de la $i-$ésima reclamación ($T_0 = 0$). Sea $X_i = c(T_i - T_{i-1}) - Y_i$ y consideremos al proceso sólo en los momentos de reclamación

$$C_{T_n} = u + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

el cual es una caminata aleatoria.

Nota 5.1 *$\psi(u) = P[inf_{n\in\mathbb{N}} C_{T_n} < 0]$ y la ruina ocurre si y sólo si $E[X_i] \leq 0$. Por lo tanto vamos a suponer que $E[X_i] > 00$ que es equivalente a*

$$E[C_t - u] > 0.$$

*Con lo cual tenemos que el ingreso medio debe ser mayor que los egresos medios y a esta condición se le conoce como **condición de ganancia neta***

Si esta condición se satisface entonces $C_{T_n} \to \infty$ entonces

$$\inf\{C_t - u | t > 0\} = \inf\{C_{T_n} - u | n \geq 1\}$$

es finito casi seguramente y podemos concluir que $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$.

Proposición 5.1 *Sea $\delta(u) = 1 - \Psi(u)$. Suponga que la distribución del monto de reclamaciones en el modelo de Cramér-Lundberg es absolutamente continua con función de densidad g. Entonces*

1. $\frac{d}{du}\delta(u) = \frac{\lambda}{c}[\delta(u) - \int_0^u \delta(u-y)g(y)dy]$.
2. $\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$.
3. $\Psi(u) = \frac{\lambda}{c}[\int_u^\infty \bar{G}(y)dy + \int_0^u \Psi(u-y)\bar{G}(y)dy]$.

5.2. Coeficiente de Ajuste

Sea $\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr$ para los valores de $r \in \mathbb{R}$ que la función generadora de momentes existe.

Lema 5.1 *Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $M_Y(r) < \infty$, entonces el proceso*

$$\{e^{-rC_t - \theta(r)t}\}_{t\geq 0}$$

es una martingala

Definición 5.1 *A la posible solución $R > 0$ de la ecuación*

$$\theta(R) = 0$$

se le llama coeficiente de ajuste.

Ejemplo 5.2.1 *Supongamos que los montos de reclamación $Y_i \sim Exp(\alpha)$, entonces*

$$\theta(r) = (\frac{\lambda}{\alpha - r} - c)r,$$

y se tiene que $R = \alpha - \alpha/c$.

5.2.1. Condición de Ganancia Neta

Sean $T_0, T_1, \ldots$ los tiempos aleatorios (tiempos de paro) en donde se presentan las reclamaciones ($T_0 = 0$). Para $k \in \mathbb{N}$ definimos $X_k = c[T_k - T_{k-1}] - Y_k$ entonces

$$E[X_k] = cE[T_k - T_{k-1}] - E[Y_k] = \frac{c}{\lambda} - \mu$$

entonces la **condición de ganancia neta** es $c > \lambda\mu$.

5.3. Desigualdad de Lundberg

Teorema 5.1 *Si el coeficiente de ajuste R existe, entonces*

$$\Psi(u) < e^{-Ru}.$$

5.4. Método de Aproximación

Teorema 5.2 *Supongamos que el coeficiente de ajuste R existe y que*

$$\int_0^\infty xe^{Rx}\frac{\lambda}{c}(1 - G(x))dx < \infty$$

entonces

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u)e^{Ru} = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M_Y'(R) - c}.$$

Nota 5.2 *El teorema puede escribirse como*

$$\psi(u) \sim \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M_Y'(R) - c}e^{-Ru},$$

entonces para u grande podemos aproximar a la probabilidad de ruina.

Ejemplo 5.4.1 *Supongamos que los montos de reclamación $Y_i \sim Exp(\alpha)$, entonces*

$$M_Y'(r) = \frac{\alpha}{(\alpha - r)^2},$$

entonces

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) e^{Ru} = \frac{\lambda}{\alpha c}$$

es decir

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \lambda/c)u}.$$

5.5. Severidad de la Ruina

Estamos interesados en la distribución de $-C_\tau$ si la ruina ocurre a dicha variable se le conoce como **severidad de la ruina**. Sea

$$\Psi_x(u) = P[\tau < \infty, C_\tau < -x].$$

Se tiene que

$$P[C_\tau < -x | \tau < \infty, C_0 = 0] = \frac{1}{\mu} \int_x^\infty (1 - G(y)) dy.$$

Donde a la variable aleatoria $-C_\tau$ se le llama severidad de la ruina.

Consideremos a τ_1 el primer tiempo de reclamación, entonces tenemos las siguientes posibilidades

1. El proceso de capital de la compañía no presenta ninguna reclamación, es decir, $\tau_1 = \infty$.
2. $\tau_1 < \infty$ pero $C_{\tau_1} \geq 0$.
3. La ruina ocurre en τ_1.

Entonces podemos escribir a la probabilidad de ruina como:

$$\Psi(u) = (1 - \frac{\lambda\mu}{c})0 + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Psi(u - y)(1 - G(y)) dy + \frac{\lambda}{c} \int_c^\infty (1_G(y) dy.$$

Ahora, sean $\tau_i = \inf\{t > \tau_{i-1} | C_t < C_{\tau_{i-1}}\}$, los tiempos escalados y $L_i = C_{\tau_i} - C_{\tau_{i-1}}$, las longitudes de las escalas. Se tiene entonces que

$$P[\tau_i < \infty | \tau_{i-1} < \infty] = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Sea $K = \sup\{i \in \mathbb{N} | \tau_i < \infty\}$ se sigue que $K \sim BinNeg(1, 1 - \frac{\lambda\mu}{c})$ y que dada K, las variables aleatorias L_i's son i.i.d. con función de densidad $(1 - G(x))/\mu$. Por otro lado, si asumiendo que L_i's son independientes entre ellas y de K, entonces

$$\inf\{C_t | t \geq 0\} = u - \sum_{i=1}^K L_i$$

y

$$P[\tau < \infty] = P[\inf\{C_t | t \geq 0\} < 0] = P[\sum_{i=1}^{K} L_i > \mu].$$

Si denotamos por

$$B(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - G(y))dy$$

a la distribución de L_i. Se puede utilizar la fórmula de Panjer pra aproximar $\Psi(u)$ con una discretización adecuada.

Definición 5.2 ***Fórmula de Pollaczek-Khintchine***

$$\Psi(u) = P[\sum_{i=2}^{K} L_i > u] = (1 - \frac{\lambda\mu}{c}) \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\lambda\mu}{c})^n (1 - B^{*n}(u)).$$

5.6. Tiempo de Ruina

Consideremos la función

$$f_\alpha(u) = E[e^{-\alpha\tau} I_{\{\tau<\infty\}} | C_0 = u].$$

Esta función está bien definida (al menos) para $\alpha \geq 0$. El siguiente resultado nos permite encontrar esta función como solución de una ecuación diferencial.

Lema 5.2 *La función $f_\alpha(u)$ es absolutamente continua y satisface la ecuación*

$$c f'_\alpha(u) + \lambda[\int_0^u f_\alpha(u-y)dG(y) + 1 - G(u) - f_\alpha(u)] - \alpha f_\alpha(u) = 0 \qquad (5.1)$$

Como esta ecuación es (en general) difícil de resolver, consideremos la transformada de transformad de Laplace (con respecto al capital inicial). Sea $\hat{f}_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-su} f_\alpha(u)du$ para $s < 0$. Tenemos que

$$\hat{f}_\alpha(s) = \frac{c f_\alpha(0) - \lambda s^{-1}(1 - M_Y(-s))}{cs - \lambda(1 - M_Y(-s)) - \alpha}. \qquad (5.2)$$

Dos resultados importantes

Lema 5.3 *Si $\mu_2 < \infty$. Entonces*

$$E[\tau I_{\tau<\infty}] = \frac{1}{c - \lambda\mu} [\frac{\lambda\mu_2}{2(c - \lambda\mu)} \delta(u) - \int_0^u \Psi(u-y)\delta(y)dy].$$

Corolario 5.1 *Sea $t > 0$. Entonces*

$$P[t < \tau < \infty] < \frac{\lambda\mu_2}{2(c - \lambda\mu)^2 t}.$$

5.7. Fórmula de Seal

Lema 5.4 *Sea t fijo, $u = 0$ y $0 < y \leq ct$. Entonces*

$$P[C_s \geq 0, 0 \leq s \leq t | C_t] = \frac{y}{ct}$$

Teorema 5.3 *Para un capital inicial 0, se tiene que*

$$\delta(0,t) = \frac{1}{ct} E[max\{C_t, 0\}] = \frac{1}{ct} \int_0^{ct} F(y;t) dy$$

Teorema 5.4 *Para un capital inicial $u > 0$, se tiene que*

$$\delta(u,t) = F(u + ct; t) \int_0^{u+ct} \delta(0, t - \frac{v-u}{c}) F(dv; \frac{v-u}{c}.$$

5.8. Simulación y Análisis del Proceso de Riesgo

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Generadores de números pseudoaleatorios

6.1.1. Generador congruencial

```
generador <- function(sem, mult=(7^5), mod=(2^31-1), incre=0, max=1000)
{
x <- sem for(i in 1:max)
x <- (mult*x+incre) %%mod
return (x/mod)
}
sem <- as.numeric(Sys.time())
mi_runif <- function(n=1,a=0,b=1)
{
u <- NULL
for(i in 1:n)
{
sem <- i+as.numeric(Sys.time())
u[i] <- generador(sem)
}
return ((b-a)*u+a)
}
u <- mi_runif(1000)
plot(u) hist(u)
U <- runif(1000)
plot(u,U)
qqplot(u,U)
abline(0,1)

# Algoritmo de Wichmann-Hill para la generacion de numeros aleatorios
WH <- function(n=1)
{
```

```
x0 <- sample(1:30000,3)
ix <- x0[1]
iy <- x0[2]
iz <- x0[3]
U <- NULL
for(i in 1:n)
{
ix <- 171*(ix %% 177) - 2*(ix/177)
iy <- 172*(iy %% 176) - 35*(iy/176)
iz <- 170*(iz %% 178) - 63*(iz/178)
if(ix <= 0) ix <- ix + 30269
if(iy <= 0) iy <- iy + 30307       if(iz <= 0) iz <- iz + 30323
u <- ((ix/30269)+(iy/30307)+(iz/30323)) %% 1
if(u==1)
u <-u-.Machine$double.eps
else if(u==0)
u <- u+.Machine$double.eps
U <- c(U,u)
}
return (U)
}
n <- 100000
wh <- WH(n)
par(mfrow=c(1,2))
plot(wh[-n],wh[-1])
hist(wh,breaks=10,freq=F)
hist(runif(100000),breaks=10,freq=F)
hist(rnorm(1000),freq=F)
y <- seq(-4,4,by=0.1)
curve(dnorm(y),add=T,col=2)
```

6.2. Pruebas Estadísticas

6.2.1. Prueba de Anderson-Darling

```
anddar <- function(x)
{
n <- length(x)
y <- sort(x)
s <- 0
for(k in 1:n)
s <- s +(2*k-1)*(log(y[k])+log(1-y[n+1-k]))
return (-n-s/n)
}
muestra <- abs(rnorm(1000000))/4
```

```
muestra2 <- runif(1000000)
par(mfrow=c(2,2))
hist(muestra, freq=F)
plot(muestra)
hist(muestra2, freq=F)
plot(muestra2)
A2 <- anddar(muestra)
# Para un nivel de significancia alfa=0.05 busquemos
# en tablas el valor w para llevar a cabo el contraste
w = 2.492
if(A2<=w) print("H0") else print("H1")
A2
```

6.2.2. Prueba de rachas

```
# Funci\'on rachas(x).
# Calcula el estadistico de prueba de Wald-Wolfowitz para probar
# si realmente una muestra ha sido obtenida aleatoriamente.
# x : es un vector de datos observados en la muestra.
rachas <- function(x)
{
# Se sustituyen los datos por 0 o 1 segun esten a la izquierda
# o la derecha de la muestra.
b <- NULL
n <- length(x)
m <- median(x)
print(m)
for(i in 1:n)
{
if(x[i] < m)
b[i] <- 0
else b[i] <- 1
}
print(b)
# En esta parte se cuentan las rachas segun el vector de 0 y 1
# construido en la parte anterior
r <- 0
for(i in 2:n)
if(b[i-1] != b[i])
r <- r+1
# En esta parte se calcula el estadistico de prueba de Wald-Wolfowitz
N1 <- sum(b)
N2 <- n - N1
media <- (2*N1*N2/(N1+N2))+1
var <- (2*N1*N2*(2*N1*N2-N1-N2))/((N1+N2)^2*(N1+N2-1))
```

```
print(var)
return ((r-media)/sqrt(var))
}
y <- WH(50)
z <- rachas(y)
z
require(adehabitat)
wawotest(y)
```

6.3. Transformada inversa

6.3.1. Distribución Exponencial

```
gen_exp <- function(n=1, lambda=1)
{
# valores uniformes
U <- runif(n)
# vector de valores exponenciales
exponencial <- (-(1/lambda))*log(U)
return(exponencial)
}
n <- 10000 # Tamano de la muestra
lambda <- 2 # Parametro de la exponencial
my_exp <- gen_exp(n,lambda)
#Compara con los generados por R
Y=rexp(n,lambda)
qqplot(my_exp,Y)
abline(0,1)
#Graficando
hist(my_exp,freq=F)
x <- seq(0,10,by=0.1)
curve(dexp(x,lambda),add=T,col=2,lty=3,lwd=3)
```

6.3.2. Distribución uniforme discreta

```
gen_uni <- function(muestra=1,cardinalidad=2)
{
# vector de valores uniformes discretos
UDI <- NULL
for(i in 1:muestra)
{
for(j in 1:cardinalidad)
{
if(U[i]<j/cardinalidad)
```

```
{
UDI[i]=j
break
}
}
}
return(UDI)
}
m <- 10 # Cardinalidad del conjunto
n <- 1000 # tamano muestra
UD <- gen_uni(n,m)
# Graficando
plot(UD)
hist(UD, breaks=c(0:m))
# Generando con R
UDR <- sample(1:10, n, rep=T)
hist(UDR, breaks=c(0:10))
```

6.3.3. Distribución Binomial

```
binomiales <- function(m=1, n=1, proba=0.5)
{
cte <- proba/(1-proba)
X <- NULL
for(j in 1:m)
{
u <- runif(1)
i <- 0
pr <- (1-proba)^n
F <- pr
repeat
{
if(u < F)
{
X <- c(X,i)
break
}
else
{
pr <- pr*cte*(n-i)/(i+1)
F <- F + pr
i <- i+1
}
}
}
```

```
return(X)
}
B <- binomiales(50000, 5, 0.5)
prop.table(table(B))
dbinom(0:5, 5, 0.5)
hist(B,freq=F,col=3,breaks=c(0:10))
points(0:5, dbinom(0:5, 5, 0.5))
```

6.3.4. Distribución Poisson.

```
# lampois es el par\'ametro y np el tamano de la muestra
# ponemos una cota a la Poisson
ran_pois <- function(np=1,lampois=1)
{
sup <- 10000
up <- NULL
mp <- NULL
for(k in 1:np)
{
up[k] <- runif(1)
i <- 0
p <- exp(-lampois)
F <- p
while(i < sup)
{
if(up[k] < F)
{
mp[k] <- i
i <- sup
}
p <- (lampois*p)/(i+1)
F <- F+p
i <- i+1
}
}
return (mp)
}
lamb <- 10 # Par\'ametro
npois <- ran_pois(n,lamb)
varmax <- max(npois)
hist(npois, breaks=c(0:varmax), freq=F)
points(x=c(0:varmax),
y=dpois(c(0:varmax),lamb), type='o', col="blue")
mean(npois)
var(npois)
```

```
# Generando Poisson con R
poisR <- rpois(n,lamb)
hist(poisR)
```

6.4. Método de Aceptación-Rechazo

6.4.1. Caso continuo

```
fd <- function(a, b)
{
x <- seq(a, b, by=0.01)
y <- 20*x*(1-x)^3
plot(x, y, type='l')
abline(h=0, col=2)
abline(v=0, col=2)
abline(v=0.25, col=3, lty=2)
abline(h=2.1094, col=3, lty=2)
}
fd(0,1)
# Tamano de la muestra
n <- 10000
# Valor de la constante
c <- 135/64
# Aceptaci\'on y rechazo
acepyrech <- function(n=1)
{
numale <- NULL
for(i in 1:n)
{
repeat
{
u1 <- runif(1)
u2 <- runif(1)
if(u2 <= (20*64/135)*u1*((1-u1)^3))
{
numale <- c(numale, u1)
break
}
}
}
return(numale)
}
muestra <- acepyrech(n)
hist(muestra, freq=F, ylim=c(0,c))
x <- seq(0 , 1, by=0.01)
```

```
curve(20*x*((1-x)^3), add=T, col=2)
abline(h=0, col=2)
abline(v=0, col=2)
abline(v=0.25, col=3, lty=2)
abline(h=2.1094, col=3, lty=2)
```

6.4.2. Distribución Gama

```
# Distribuci\'on Gama(3/2,1)
gama <- function(n=1)
{
X <- NULL
for(i in 1:n)
{
repeat
{
u1 <- runif(1)
u2 <- -(3/2)*log(runif(1))
if(u1 <= sqrt(2*exp(1)*u2/3)*exp(-u2/3))
{
X <- c(X,u2)
break
}
}
}
return
(X)
}
gamas<-gama(100000)
hist(gamas, freq=F, col=3)
x <- seq(0,max(gamas),by=0.01)
curve(dgamma(x,3/2,1),add=T,col=4,lty=2,lwd=3)
# anal\'iticamente sabemos que la esperanza es 1/3
mean(muestra)
```

6.4.3. Caso discreto

```
# Tamano de la muestra
n <- 10000
# vector de probabilidades
probas <- c(0.2, 0.15, 0.35, 0.2, 0.1)
#prob=array(c(0.2, 0.15, 0.35, 0.2, 0.1))
# Encontrando la constante
cte <- max(probas)/(0.2)
```

```
#c=max(prob)/(1/length(prob))
# Algoritmo
X <- NULL for(i in 1:n)
{
repeat
{
U1 <- runif(1)
Y <- floor(5*U1)+1
U2 <- runif(1)
if(U2 <= 5*probas[Y]/c)
{
X <- c(X,Y)
break
}
}
}
tabla <- table(X)
# Estimaci\'on de probabilidades
fre <- tabla/sum(tabla)
fre
probas
```

6.5. Cociente de Uniformes

6.5.1. Distribución exponencial

```
# Tamano de la muestra
n <- 10000
# Par\'ametro de la exponencial
lambda <- 5
# Implementando el algoritmo
u <- numeric(n)
v <- numeric(n)
expcoc <- numeric(n)
gen_expo <-
function(n=1, lambda=1)
{
lamb <- sqrt(lambda)
for(i in 1:n)
{
u[i] <- runif(1,0,lamb)
b <- -(u[i]/lambda)*(2*log(u[i])-log(lambda))
v[i] <- runif(1,0,b)
expcoc[i] <- v[i]/u[i]
}
```

```
return(expcoc)
}
mis_expo <- gen_expo(10000,5)
mean(mis_expo)
hist(mis_expo, freq=F)
x <- seq(0,10,by=0.1)
curve(dexp(x,lambda),add=T,col=2)
```

6.6. Simulando otras distribuciones

6.6.1. Normal, Box-Muller

```
 boxmuller <- function()
{
u <- runif(2)
x <- sqrt(-2*log(u[1]))*cos(2*pi*u[2])
y <- sqrt(-2*log(u[1]))*sin(2*pi*u[2])
z <- c(x,y)
return (z) }
mi_rnorm <- function(n=1, mu=0, sigma=1)
{
if(n>1)
{
if(n%%2 == 1)
{
aux <- mi_rnorm()
z <- c(aux,mi_rnorm(n-1))
}
else
{
z <- NULL
for(i in 1:(n/2))
z <- c(z,boxmuller())
}
}
else
{
z <- boxmuller()[1]
}
return (mu+sigma*z)
}
normales <- mi_rnorm(10000,-2,2)
hist(normales,freq=F,ylim=c(0,0.4))
x <- seq(-3,3,by=0.1)
curve(dnorm(x,-2.2),add=T,col=2,lty=3,lwd=3)
```

6.6.2. Distribución Gamma, aceptación y rechazo

```
gama <- function(x, alpha, beta)
{
return(beta^alpha)*(x^(alpha-1))*(exp(-x*beta)))/(gamma(alpha)
}
M <- function(alpha, a, b)
{
return ((((alpha-a)/((1-b)*exp(1)))^(alpha-a))*(b^(-a)))
}
niter <- 100000
alpha <- 2
beta <- 4
a <- floor(alpha)
b <- a/alpha
g <- vector("numeric",niter)
for(j in 1:niter)
{
iter <- 0
AR <- 0
while(AR == 0)
{
u <- runif(1)
t <- 1
for(i in 1:a)
{
x <- (-1/b)*log(runif(1))
if(u <= ((gama(x,alpha,1))/(M(alpha,a,b)*gama(x,a,b))))
{
AR <- 1
}
else
{
AR <- 0
iter <- iter + 1
}
}
}
g[j] <- x/beta
}
hist(g, freq=F, ylim=c(0,1.4))
x <- seq(0, 4, by=0.1)
curve(dgamma(x,alpha,beta), add=T, col=2, lty=3, lwd=3)
```

6.6.3. Distribución Beta

```
betas <- function(alpha=1, beta=1)
{
y1 <- rgamma(1,alpha,1)
y2 <- rgamma(1,beta,1)
return (y1/(y1+y2))
}
mi_beta <- function(n=1,alpha=1,beta=1)
{
b <- NULL
for(i in 1:n)
b <- c(betas(alpha,beta),b)
return (b)
}
mb <- mi_beta(1000,2,2)
hist(mb,freq=F)
x <- seq(0,1,by=0.01)
curve(dbeta(x,2,2),add=T,col=2, lty=3, lwd=3)
```

6.6.4. Distribución Bernoulli

```
bernoulli <- function(n=1, p=0.5)
{
b <- NULL    for(i in 1:n)
{
u <- runif(1)
if(u <= p)
{
b <- c(1,b)
}
else
{
b <- c(0,b)
}
}
return (b)
}
b <- bernoulli(10000,0.3)
mean(b)
```

6.6.5. Distribución Geométrica

```
geo <- function(p)
{
y <- rexp(1,-log(1-p))
return (1 + floor(y))
}
mi_geo <- function(n=1, p)
{
g <- NULL
for(i in 1:n)
{
g <- c(g,geo(p))
}
return (g)
}
geometricas <- mi_geo(10000,0.5)
hist(geometricas,breaks=c(0:15),freq=F) points(x=c(0:12),y=dgeom(c(0:12),0.5),type='
```

6.6.6. Distribución Poisson

```
poiss <- function(lambda=1)
{
n <- 1
a <- 1
repeat
{
u <- runif(1)
a <- a*u
if(a >= exp(-lambda))
n <- n+1
else break
}
return (n-1) }
mi_poisson <- function(n=1,lambda=1)
{
p <- NULL
for(i in 1:n)
p <- c(p,poiss(lambda))
return (p)
}
poissones <- mi_poisson(10000,10)
hist(poissones, freq=F)
points(x=c(0:22), y=dpois(c(0:22),10), type="o", col="blue")
```

6.7. Simulando procesos estocásticos

6.7.1. Cadenas de Markov a tiempo discreto

```
#Simula una caminata los enteros positivos
# N\'umero de estados
M=10
# Probabilidades
p=7/8
# mover a la derecha
q=1-p
# mover a la izquierda
# Distribuci\'on inicial
pi=array(1/M,dim=c(1,M))
# Matriz de Transici\'on
MT=array(0,dim=c(M,M))
#N\'mero de transiciones
n=100
# Realizaci\'on de la Cadena de Markov
X=NULL
# Creando la Matriz de Transici\'on
for (i in 1:M)
{
for(j in 1:M)
{
if(j==i+1)
{
MT[i,j]=p
}
if(j==i-1)
{
MT[i,j]=q
}
}
}
MT[1,2]=1
MT[M,M-1]=1
# Inicia la Cadena de Markov
U=runif(1)
U
i=1
suma=0
while(i<=M)
{
suma=pi[i]+suma
if(U<suma)
```

```
{
X[1]= i
i=M+1
}
i=i+1
}
# Estado Inicial
X[1]
# Genera una trayectoria de la Cadena de Markov
k=2
while(k<=n)
{
i=X[k-1]
#El estado anterior
sum=0
j=1
U=runif(1)
while(j<=M)
{
sum=MT[i,j]+sum
sum
if(U<sum){
X[k]=j
#El nuevo estado
j=M+1
}
j=j+1
}
k=k+1
}
plot(X,type='p',xlab='Tiempo',ylab='Espacio de Estados',col='red',main='Caminata Alea
```

6.7.2. Proceso de Poisson homogéneo

```
# Simulaci\'on de un proceso de Poisson
PP <- function(lambda, T)
{
tiempo <- 0
i <- 0
si <- NULL
repeat{
u <- runif(1)
if(rbinom(1,1,0.05))
tiempo <- tiempo - (1/lambda)*log(u)
if(tiempo > T) break
```

```
i <- i + 1
si <- c(si, tiempo)
if(!(1000-i)) break
}
plot(si,type='s',col='green')
return(c(tiempo, i))
}
md <- NULL
n <- 10000
j <- 0
for(i in 1:n)
{
salida <- PP(1/800, 50000)
if((salida[1] > 50000) && (salida[2] <= 1000))
{
md <- rbind(md, salida)
j <- j+1
}
p <- j/n
}
p
```

6.7.3. Proceso de Poisson no homogéneo

```
# Simulaci\'on de un proceso de Poisson no homogeneo
PPNH <- function(lambdat, lambda, T)
{
tiempo <- 0
i <- 0
si <- NULL
repeat
{
u <- runif(1)
tiempo <- tiempo - (1/lambda)*log(u)
if(tiempo > T)
break
u <- runif(1)
if(u <= eval(lambdat)/lambda)
{
i <- i + 1
si <- c(si, tiempo)
}
}
plot(si, type='s', col='green')
return(si)
```

```
}
lambdat <- expression(tiempo/2)
PPNH(lambdat, 0.06, 1000)
```

6.7.4. Proceso de Poisson compuesto

```
# Modelo de riesgo Cramer-Lundberg
cramlund <- function(u0, cte, lambda, mu, sigma, T)
{
tiempo <- 0
Ct <- u0
severidad <- 0
ruina <- 0
plot(c(tiempo,T),c(0,0), ylim=c(-10000,10000000))
repeat{
u <- runif(1)
p0 <- c(tiempo, Ct)
tn <- -(1/lambda)*log(u)
tiempo <- tiempo + tn
Ct <- Ct + cte*tn
p1 <- c(tiempo,Ct)
segments(p0[1],p0[2],p1[1],p1[2],col='green',lwd=2)
Ct <- Ct - rlnorm(1, mu, sigma)
p2 <- c(tiempo,Ct)
segments(p1[1],p1[2],p2[1],p2[2],col='red',lty=3,lwd=2)
if(Ct < 0)
{
severidad <- Ct
ruina <- 1
break
}
if(tiempo > T)
break
}
return (c(ruina, severidad))
}
simulaciones <- NULL
n <- 100
for(i in 1:n)
simulaciones <- rbind(simulaciones, cramlund(1235000, 150000, 1/10, 12.4, 1.74, 365))
proba <- mean(simulaciones[,1])
sevprom <- (simulaciones[,1] %*% simulaciones[,2])/sum(simulaciones[,1])
proba
sevprom
```

Bibliografía

[1] Asmussen, S. *Ruin Probabilities.* Advances Series in Statistical Science & Applied Probability, Vol. 2. Word Scientific, 2001.

[2] Beard, R. E. et al. Risk Theory. *The stochastic basis of insurance. Great Britain*, Chapman and Hall, 3rd edition, 1984.

[3] Daykin, C. D. et al. *Practical risk theory for actuaries.* Great Britain, Chapman and Hall, 1993.

[4] Gerber, Hans U. *An introduction to mathematical risk theory.* USA, Huebner Foundation, 1980.

[5] Hoel, P. G., Port, S. C., Stone, C. J. *Introduction to probability theory.* Houghton Mifflin Company, 1971.

[6] Kass, R., Goovarts, M. ,Dhaene, J. and Denuit, M. *Modern Actuarial Risk Theory, Using R.* Springer, 2nd edition, 2008.

[7] Rincón, L. Una *Introducción a la teoría del Riesgo. Las prensas de ciencias.*