

Lecture : Sucesiones y convergencia de variables aleatorias

Lecturer: F. Baltazar-Larios

Scribe:

Suponemos que en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ están definidas todas las variables aleatorias consideradas en este documento.

Dada una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$, en muchos escenarios, nos gustaría ver si ésta converge a otra variable aleatoria X , es decir, estamos interesados en saber si conforme n crece se acerca en algún sentido a X .

Suponga que estamos interesados en conocer información (su valor, distribución, etc) de una variable aleatoria X pero no podemos observarla directamente. Sin embargo, es posible realizar algunos experimentos y mediciones para obtener una primera estimación X_1 de X . Después, basados en la primera estimación, se realizan más experimentos y mediciones para actualizar y mejorar la estimación, denotemos por X_2 a la segunda estimación de X . Si continuamos con este proceso para actualizar la estimación obtenemos $\{X_n\}_{n \geq 1}$ y a medida n aumenta la estimación de X es mejor, es decir, no vamos acercando a X o la sucesión converge a X .

En este documento se presentan los conceptos teóricos para estudiar la convergencia de una sucesión de variables aleatorias. Se definen diferentes tipos de convergencia las cuales interpretaremos como diferentes formas en que $\{X_n\}_{n \geq 1}$ se acerca (converge) X . Además, presentaremos las relaciones entre los diferentes tipos de convergencia e ilustraremos con ejemplos. Además discutiremos 2 teoremas de límites, Los teoremas de límite se encuentran entre los resultados más fundamentales en la teoría de probabilidad, la ley de los grandes números y el teorema del límite central.

1. TIPOS DE CONVERGENCIA EN VARIABLES ALEATORIAS

1.1. Convergencia puntual.

Definición 1.1. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge puntualmente a la variable aleatoria X si para cada $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Denotamos este tipo de convergencia por $X_n \rightarrow X$.

Ejemplo 1.1. Consideremos el espacio medible $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$. Definimos una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ por $X_n(\omega) = \omega^n$.

En la Figura 1 se muestra la gráfica de las primeras 10 variables aleatorias de la sucesión y cuando $n = 100$. Entonces podemos ver que la sucesión converge puntualmente a la variable aleatoria

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } \omega = 1. \end{cases}$$

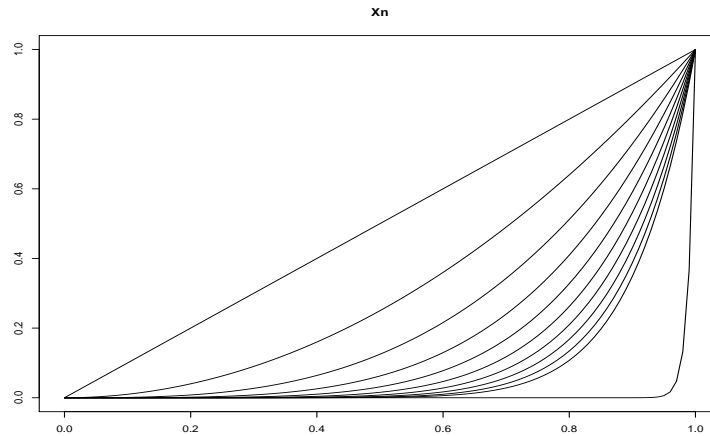


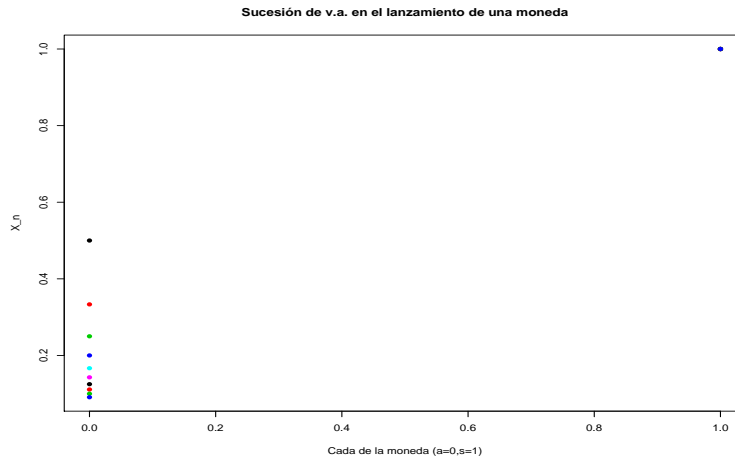
FIGURE 1. Gráfica de las variables aleatorias del Ejemplo 1.1, $X_n(\omega) = \omega^n$ para $n = 1, 2, \dots, 10, 100$.

Ejemplo 1.2. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar una moneda justa. El espacio muestral es $\Omega = \{a, s\}$. Definimos una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ en este espacio muestral de la siguiente manera

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } \omega = a \\ 1 & \text{si } \omega = s. \end{cases}$$

En la Figura 2 se muestra la forma de las primeras 10 variables aleatorias de la sucesión. Entonces podemos ver que la sucesión converge puntualmente a la variable aleatoria

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = a \\ 1 & \text{si } \omega = s. \end{cases}$$

FIGURE 2. Gráfica de las variables aleatorias del Ejemplo 1.2 para $n = 1, 2, \dots, 10$.

Ejercicio 1.1. Para la sucesión de v.a. del Ejemplo 1.2:

- (1) ¿ $\{X_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de v.a. independientes?
- (2) Encontrar la función de densidad y distribución de $\{X_n\}_{n \geq 1}$.
- (3) Hacer una gráfica de las funciones de distribución de $\{X_n\}_{n \geq 1}$.

Ejemplo 1.3. Se lanza repetidamente una moneda justa. Ω es el conjunto de todas las posibles sucesiones de a y s . Definimos una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ en este espacio muestral de la siguiente manera

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si en el } n\text{-ésimo lanzamiento sale } a \\ 1 & \text{si en el } n\text{-ésimo lanzamiento sale } s. \end{cases}$$

¿A qué v.a. converge puntualmente esta sucesión?

1.2. Convergencia casi segura. De acuerdo a la Definición 1.1 para que exista convergencia puntual es necesario que la sucesión de reales $\{X_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ converja a $X(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Esta condición puede ser relajada si pedimos que converja en todo Ω excepto en un subconjunto de probabilidad cero, así se da lugar al siguiente tipo de convergencia.

Definición 1.2. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge casi segura (c.s.) o casi dondequiera a la variable aleatoria X si

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}] = 1.$$

Denotamos este tipo de convergencia por $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

Ejemplo 1.4. Consideremos el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \mathbb{P}_u)$, donde \mathbb{P}_u es la medida uniforme, es decir, $\mathbb{P}_u[(a, b)] = b - a$ para cualesquiera reales $0 \leq a \leq b \leq 1$. Definimos una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ por

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } \omega \in (1/n, 1]. \end{cases}$$

En la Figura 3 se muestra la evolución de las variables aleatorias del Ejemplo 1.1 para $n = 1, \dots, 6$.

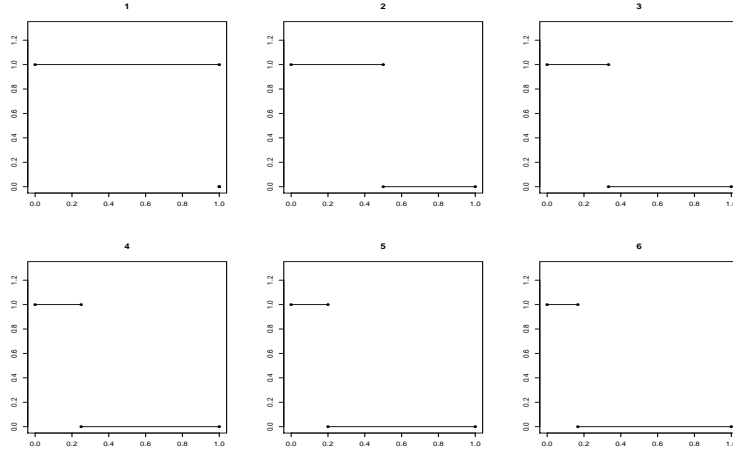


FIGURE 3. Gráfica de las variables aleatorias X_n $n = 1, 2, \dots, 6$ del Ejemplo 1.4 para .

Desde que $\mathbb{P}_u[[0, 1/n]] = 1/n$, tenemos que cada v.a. $X_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$ entonces es natural afirmar que

$$X_n \xrightarrow{c.s.} 0.$$

La justificación de la afirmación anterior es

$$\mathbb{P}_u[\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0\}] = \mathbb{P}_u[(0, 1]] = 1,$$

y

$$\mathbb{P}_u[\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq 0\}] = \mathbb{P}_u[0] = 0.$$

Nota 1.1. Dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(0) \neq 0,$$

X_n no converge puntualmente a 0.

Ejemplo 1.5. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar una moneda justa. El espacio muestral es $\Omega = \{a, s\}$. Definimos una secuencia de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ en este espacio muestral de la siguiente manera

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{si } \omega = a \\ (-1)^n & \text{si } \omega = s. \end{cases}$$

¿La sucesión del Ejemplo 1.5 converge c.s. a 1?

Ejercicio 1.2. Consideremos el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \mathbb{P}_u)$. Definimos una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ por

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in [0, (n+1)/2n) \\ 0 & \text{si } \omega \in [(n+1)/2n, 1]. \end{cases}$$

- (1) Encontrar la v.a. X tal que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$,
 (2) ¿ $X_n \rightarrow X$?

1.3. Convergencia en Probabilidad. Una forma de interpretar la convergencia de una sucesión $\{X_n\}_{n \geq 1}$ a X es si la distancia entre X_n y X es cada vez más pequeña a medida que n crece. Si definimos la distancia entre las variables aleatorias X_n y X como

$$\mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon]$$

entonces tenemos el concepto de convergencia en probabilidad.

Definición 1.3. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge en probabilidad a la variable aleatoria X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\} = 0 \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Denotamos este tipo de convergencia por $X_n \xrightarrow{p} X$.

Ejemplo 1.6. Sea $X_n \sim \text{Exp}(n)$, entonces $X_n \xrightarrow{p} 0$ desde que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - 0| > \varepsilon] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n > \varepsilon] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n\varepsilon} \\ &= 0, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

En la Figura 4 se ilustra la convergencia en probabilidad para el Ejemplo 1.6.

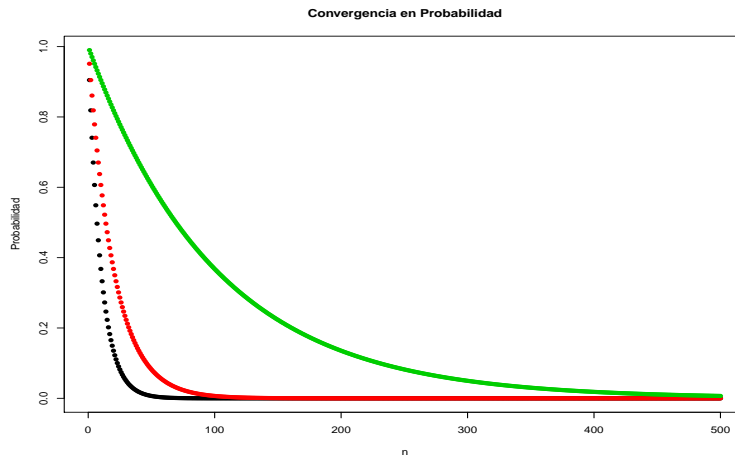


FIGURE 4. Gráfica de $P[X_n > \varepsilon]$ para $n = 1, \dots, 500$ y $\varepsilon_1 = 0.1$ =negro, $\varepsilon_2 = 0.05$ =rojo y $\varepsilon_3 = 0.01$ =verde.

Ejercicio 1.3. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d. tales que $X_n \sim N(0, 1)$. Si definimos a

$$S_n := \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n},$$

Use la desigualdad de Chebyshev para probar que

$$S_n \xrightarrow{p} 0.$$

1.4. Convergencia en Media. En esta sección definiremos la distancia entre las variables aleatorias X_n y X como

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^k],$$

para algún $k \in \mathbb{N}$ (fijo) y entonces tenemos el concepto de convergencia en k -media.

Definición 1.4. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge en k -media o L^k a la variable aleatoria X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^k] = 0.$$

Denotamos este tipo de convergencia por $X_n \xrightarrow{L^k} X$.

Nota 1.2. En la Definición 1.4 si

- (1) $k = 1$ decimos que X_n converge en media a X y escribimos $X_n \xrightarrow{m} X$,
- (2) $k = 2$ decimos que X_n converge en media cuadrática a X y escribimos $X_n \xrightarrow{m.c.} X$.

Ejemplo 1.7. Sea $X_n \sim U(0, 1/n)$, entonces $X_n \xrightarrow{L^k} 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$ desde que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - 0|^k] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n^k] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/n} x^k dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)n^k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

En la Figura 5 se ilustra la convergencia en k -media para el Ejemplo 1.7 y $k = 1, \dots, 5$.

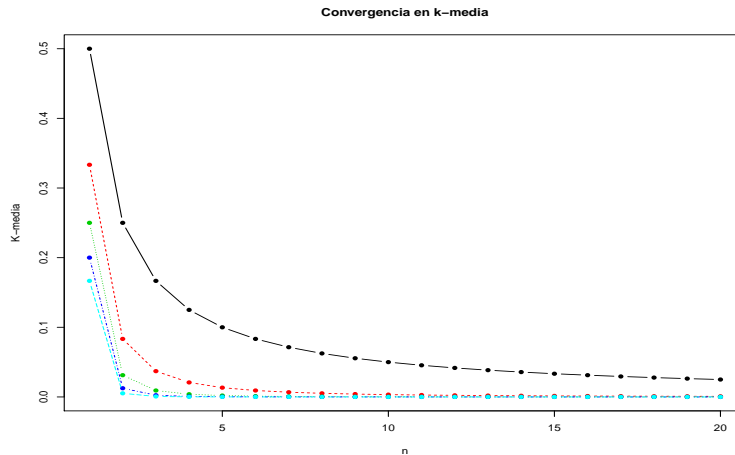


FIGURE 5. Gráfica de $\mathbb{E}[|X_n - 0|^k]$ para $n = 1, \dots, 20$ y $k = 1, \dots, 5$.

Ejercicio 1.4. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias definidas por

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n^2 & \text{con probabilidad } 1/n \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - 1/n. \end{cases}$$

Probar que:

- (1) $X_n \xrightarrow{P} 0$
- (2) X_n no converge en k -media para ninguna $k \in \mathbb{N}$.

1.5. Convergencia en Distribución. En esta sección definiremos el tipo de convergencia más débil.

Definición 1.5. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge en distribución a la variable aleatoria X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

para toda x donde F_X es continua. Denotamos este tipo de convergencia por $X_n \xrightarrow{d} X$.

Ejemplo 1.8. Sea $X_n \sim N(0, \sigma^2/n)$, entonces $X_n \xrightarrow{d} 0$ desde que

$$F_{X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2 n/2\sigma^2} du.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Por otro lado $X = 0$ tiene función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ para todo punto donde F_X es continua.

En la Figura 6 se ilustra la convergencia en distribución para el Ejemplo 1.8.

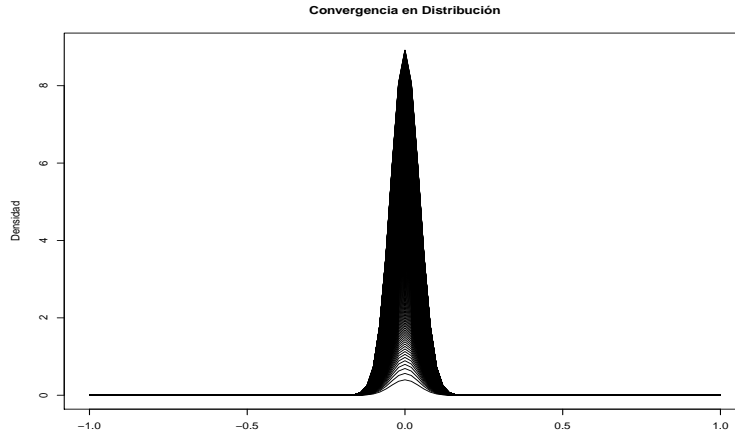


FIGURE 6. Gráfica de función de densidad del Ejemplo 1.8 para $n = 1, \dots, 500$ y $\sigma = 1$.

Ejercicio 1.5. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tales que

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Probar que $X_n \xrightarrow{d} X$ donde $X \sim \text{Exp}(1)$.

2. RELACIÓN ENTRE LOS TIPOS DE CONVERGENCIA

2.1. Convergencia casi segura y convergencia en probabilidad.

Proposición 2.1. *Convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad.*

Proof. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ y $\varepsilon > 0$. Consideramos la sucesión de eventos decrecientes $\{A_n\}_{n \geq 1}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$ el evento está definido por

$$A_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| > \varepsilon\},$$

además definimos los eventos

$$B_n := \{|X_n - X| > \varepsilon\},$$

entonces, desde que $B_n \subset A_n$ tenemos que $\mathbb{P}[B_n] \leq \mathbb{P}[A_n]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B_n] \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] \\
&= \mathbb{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} A_n] && \text{por continuidad de la medida de probabilidad} \\
&= \mathbb{P}[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n] \\
&= \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}] \\
&= \mathbb{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \neq X] \\
&= 0 && \text{por convergencia c.s.}
\end{aligned}$$

□

Nota 2.1. En general el recíproco de la Proposición 2.1 no es cierto.

Ejercicio 2.1. Considere la sucesión de variables aleatorias definidas por

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1/n \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - 1/n. \end{cases}$$

Probar que $X_n \xrightarrow{P} 0$ pero no converge c.s.

2.2. Convergencia en media y convergencia en probabilidad.

Proposición 2.2. Convergencia en k -media (para toda $k \in \mathbb{N}$) implica convergencia en probabilidad.

Proof. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tal que X_n converge en k -media a X para toda $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - X|^k > \varepsilon^k] \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^k]}{\varepsilon^k} && \text{por desigualdad de Markov} \\
&= 0 && \text{por convergencia en } k\text{-media.}
\end{aligned}$$

□

Nota 2.2. En general el recíproco de la Proposición 2.2 no es cierto.

Ejemplo 2.1. Consideremos el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \mathbb{P}_u)$. Definimos una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ por

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } \omega \in [0, 1/n) \\ 0 & \text{si } \omega \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

$X_n \xrightarrow{P} 0$ desde que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - 0| > \varepsilon] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n > \varepsilon] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - 0|] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces X_n no converge en media a 0.

2.3. Convergencia en probabilidad y convergencia en distribución.

Proposición 2.3. *Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución.*

Proof. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $X_n \xrightarrow{P} X$, F_X la función de distribución de X , x un punto de continuidad de F_X y $\varepsilon > 0$. Si definimos los eventos $A_n := \{|X_n - X| > \varepsilon\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= \mathbb{P}[X_n \leq x] \\ &= \mathbb{P}[X_n \leq x, A_n] + \mathbb{P}[X_n \leq x, A_n^c] \\ &\leq \mathbb{P}[X_n \leq x, A_n^c] + \mathbb{P}[A_n] \\ &= \mathbb{P}[X_n \leq x, |X_n - X| \leq \varepsilon] + \mathbb{P}[A_n] \\ &= \mathbb{P}[X_n \leq x, -\varepsilon \leq X_n - X \leq \varepsilon] + \mathbb{P}[A_n] \\ &= \mathbb{P}[X_n \leq x, X_n \leq \varepsilon + X, X \leq X_n + \varepsilon] + \mathbb{P}[A_n] \\ (1) \quad &\leq \mathbb{P}[X \leq x + \varepsilon] + \mathbb{P}[A_n] \end{aligned}$$

Entonces tomando limsup en la expresión (1) tenemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}[X \leq x + \varepsilon] + \mathbb{P}[A_n]) \\ &= F_X(x + \varepsilon) \quad \text{por convergencia en probabilidad} \\ (2) \quad &= F_X(x) \quad \text{por continuidad en } x \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_X(x - \varepsilon) \quad \text{por continuidad en } x \\ &= \mathbb{P}[X \leq x - \varepsilon, A_n] + \mathbb{P}[X \leq x - \varepsilon, A_n^c] \\ &\leq \mathbb{P}[X_n \leq x] + \mathbb{P}[A_n] \\ &= F_{X_n}(x) + \mathbb{P}[A_n] \end{aligned}$$

TABLE 1. Relación entre tipos de convergencia

Convergencia	Puntual	C.S.	Probabilidad	Media	Distribución
Puntual	\iff	\implies	\implies	\implies	\implies
C.S.	$\not\implies$	\iff	\implies	$\not\implies$	\implies
Probabilidad	$\not\implies$	$\not\implies$	\iff	$\not\implies$	\implies
Media	$\not\implies$	$\not\implies$	\implies	\iff	\implies
Distribución	$\not\implies$	$\not\implies$	$\not\implies$	$\not\implies$	\iff

Tomando liminf en la expresión (3) tenemos

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (F_{X_n}(x) + \mathbb{P}[A_n]) \\
 (3) \quad &= \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \quad \text{por convergencia en probabilidad}
 \end{aligned}$$

De (2) y (3) se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

para x un punto de continuidad de X .

□

Nota 2.3. En general el recíproco de la Proposición 2.3 no es cierto.

Ejemplo 2.2. Sea $X \sim N(0, 1)$ y una sucesión de variables aleatorias definidas por

$$X_n(\omega) = \begin{cases} X & \text{si } n \text{ es par} \\ -X & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Desde que la función de densidad de X es par tenemos que $X_n \sim N(0, 1)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{d} X$. Por otro lado, dada $\varepsilon > 0$ y n impar tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[2|X| > \varepsilon] > \frac{1}{2} > 0,$$

por lo que X_n no converge en probabilidad a X .

2.4. Tabla de relaciones de tipo de convergencia. En la Tabla 1 se muestra la relación entre los distintos tipos de convergencia.

Ejercicio 2.2. Da un ejemplo de $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ pero **NO** $X_n \xrightarrow{m} X$.

Ejercicio 2.3. Da un ejemplo de $X_n \xrightarrow{m} X$ pero **NO** $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

3. TEOREMAS LÍMITE

En esta sección abordaremos la ley de los grandes números (LGN) y el teorema del límite central (TLC) que son dos de los resultados teóricos de mayor impacto en las áreas de probabilidad y estadística.

3.1. Leyes de los Grandes Números.

Definición 3.1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria. Definimos a la media muestral como la variable aleatoria

$$S_n := \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Nota 3.1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria tal que $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$ y $\text{Var}[X_1] = \sigma^2 < \infty$. Si

$$Z_n := \frac{S_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

entonces

- (1) $\mathbb{E}[S_n] = \mu$,
- (2) $\text{Var}[S_n] = \frac{\sigma^2}{n}$,
- (3) $\mathbb{E}[Z_n] = 0$,
- (4) $\text{Var}[Z_n] = 1$.

Existe dos versiones de LGN, la interpretación de ambas es que si se realiza un experimento aleatorio una cantidad suficientemente grande de veces y se promedia el resultado, éste converge a la media de la variable aleatoria que modela el experimento. La diferencia entre las versiones de la LGN es el tipo de convergencia que es consecuencia de las distintas hipótesis en cada una de las leyes.

Teorema 3.1. Ley Débil de los Grandes Números (LDGN)

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$ y $\text{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$ para toda $i = 1, \dots, n$, entonces

$$S_n \xrightarrow{p} \mu.$$

Proof. Sea $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|S_n - \mu| \leq \varepsilon] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[S_n]}{\varepsilon^2} && \text{por desigualdad de Chebyshev} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[X_1]}{n\varepsilon^2} && \text{por Nota 3.1} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.1. Consideremos una colección X_1, \dots, X_n de variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim N(1/2, 1/4)$ si i es par y $X_i \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ si i es impar. Tenemos que $\mathbb{E}[X_i] = 1/2$ y $\text{Var}[X_i] = 1/4$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces por la LDGN $S_n \xrightarrow{p} 1/2$.

En la Figura 7 se puede ver la convergencia de S_n del Ejemplo 3.1 a la variable aleatoria $X = 1/2$.

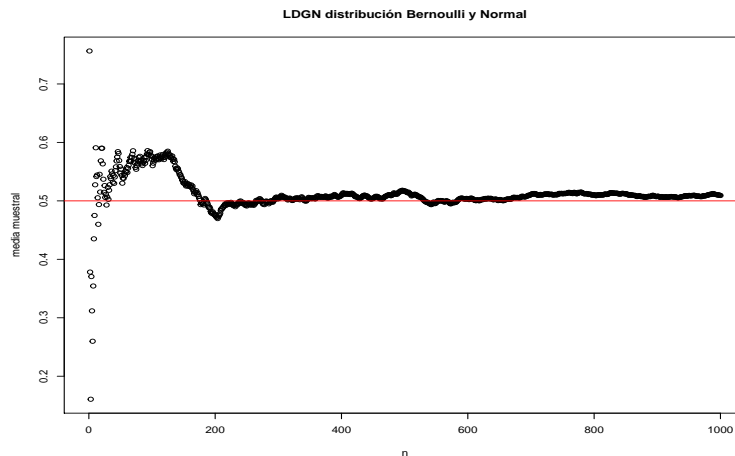


FIGURE 7. Gráfica de S_n del Ejemplo 3.1 para $n = 1, 2, \dots, 1000$.

Teorema 3.2. Ley Fuerte de los Grandes Números (LFGN)

Sean X_1, \dots, X_n v.a.i.i.d. con $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$, entonces

$$S_n \xrightarrow{c.s.} \mu.$$

Ejemplo 3.2. Consideremos una l.a. X_1, \dots, X_n tales que $X_i \sim U(0, 1)$, entonces $\mathbb{E}[X_i] = 1/2$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por la LFGN $S_n \xrightarrow{c.s.} 1/2$.

En la Figura 8 se puede ver la convergencia de S_n del Ejemplo 3.2 a la variable aleatoria $X = 1/2$.

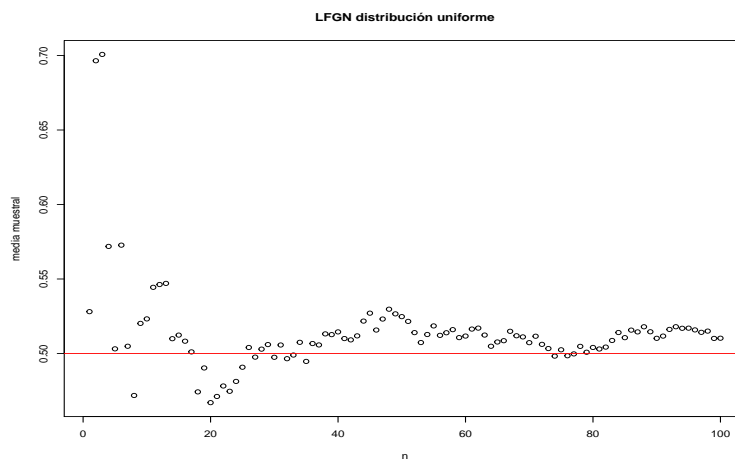


FIGURE 8. Gráfica de las variables aleatorias S_n Ejemplo 3.2 para $n = 1, 2, \dots, 10, 100$.

3.2. Teorema del Límite Central. El TLC establece que, bajo ciertas condiciones, la suma de una cantidad suficientemente grande de variables aleatorias converge en distribución a una variable aleatoria Normal.

Teorema 3.3. Teorema de Límite Central

Sean X_1, \dots, X_n una m.a. con $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$ y $\text{Var}[X_1] = \sigma^2 < \infty$. entonces

$$Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Ejemplo 3.3. Consideremos una la m.a. X_1, \dots, X_n tales que $X_i \sim U(0, 1)$, entonces $\mathbb{E}[X_i] = 1/2$ y $\text{Var}(X_i) = 1/12$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por el TLC $Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

En la Figura 9 se puede ver la convergencia de Z_n del Ejemplo 3.3 a una Norma Es-tandar.

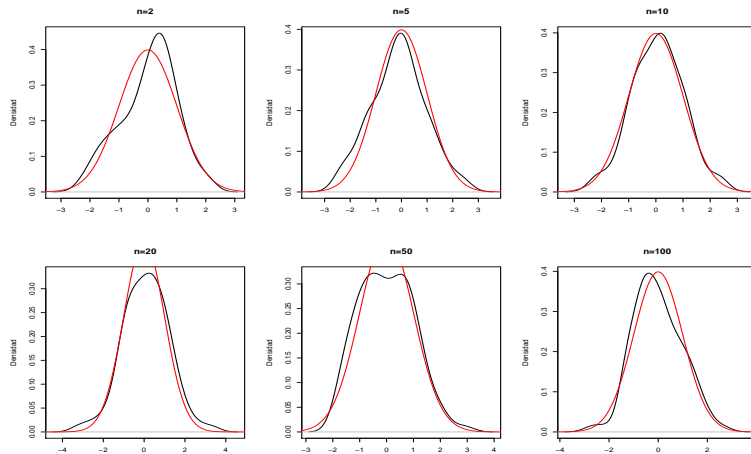


FIGURE 9. Gráfica de las densidades de Z_n Ejemplo 3.3 para $n = 2, 5, 10, 20, 50, 100$.

El TLC es un resultado muy importante por la cantidad de aplicaciones reales que tiene debido a que en muchos escenarios la variable aleatoria de interés se puede ver como la suma de un gran número de variables aleatorias independientes. Algunas de las áreas donde se aplica el TLC son:

- (1) En laboratorios de prueba, los errores de medición de laboratorio generalmente se modelan mediante variables aleatorias normales.
- (2) En telecomunicaciones y el procesamiento de señales, modelar el "ruido" por medio de un ruido Gaussiano es lo más usual.
- (3) En finanzas, los cambios porcentuales en los precios de algunos activos a veces se modelan mediante variables aleatorias normales.
- (4) En Inferencia Estadística para sustentar las propiedades y eficiencia de los estimadores.

Algorithm 1 Teorema del Límite Central

1: Escribir a la variable aleatoria de interés Z como la suma de v.a.i.i.d.

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i,$$

donde $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ y $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$

2: Encontrar la $\mathbb{E}[Z] = n\mu$ y $\text{Var}[Z] = n\sigma^2$.

3: Concluir que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[z_1 \leq Z \leq z_2] &= \mathbb{P}\left[\frac{z_1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{Z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{z_2 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] \\ &\approx \Phi\left(\frac{z_2 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{z_1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Donde $\Phi(x) = F_X(x)$ para $X \sim N(0, 1)$.

Ejercicio 3.1. Suponga que el tiempo de atención de un cajero de banco para cada cliente $i = 1, \dots, n$ es una variable aleatoria X_i tal que $\mathbb{E}[X_i] = 3$ y $\text{Var}[X_i] = 1$. Si suponemos que los tiempos de servicio son independientes y Z es el tiempo total de atención a 100 clientes, encontrar $\mathbb{P}[290 \leq Z \leq 310]$.