

## Tarea de Variable Compleja I

“Algebra y Geometría de Números Complejos”

1. Encuentra y simplifica las siguientes operaciones. Exprésalo en forma polar y exponencial los resultados y también encuentra la parte real e imaginaria de cada inciso.

$(1-i)(2-i)(3-i)$	$(\sqrt{3} + i)^6$	$\frac{4+3i}{3-4i}$	$\frac{5-z}{5+z} \text{ con } z = 4 + 3i$	$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$
$\frac{3+7i}{2+3i} + \frac{5-8i}{2-3i}$	$\frac{5}{i} + \frac{2}{i^3} - \frac{20}{i^{18}}$	$\frac{i}{3-i} \left(\frac{1}{2+3i}\right)$	$\frac{(4+5i) + 2i^3}{(2+i)^2}$	$\frac{i}{1+i}$

2. Sea  $z = a + bi$ . Expresa la cantidad dada en términos de  $a$  y  $b$

$re\left(\frac{1}{z}\right)$	$re(z^2)$	$im(2z + 4\bar{z} - 4i)$	$im(z^2 + \bar{z}^2)$	$re(z^2 + \bar{z}^2)$
------------------------------	-----------	--------------------------	-----------------------	-----------------------

3. Sea  $z = a + bi$ . Expresa la cantidad dada en términos de la parte real  $re(z)$  e imaginaria  $im(z)$  de las siguientes expresiones

$im((1+i)z)$	$re(z^2)$	$im(z^2)$
--------------	-----------	-----------

4. ¿Cuáles de los siguientes números son reales e imaginarios puros?

$z^2 - \bar{z}^2$	$\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right)(z + \bar{z})$	$z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1$
$\frac{a\bar{b} + \bar{a}b}{a\bar{a} - 1}$	$\frac{z - \bar{z}}{a\bar{b} - \bar{a}b}$	$\frac{i(a\bar{b} + \bar{a}b)}{(a\bar{b} - \bar{a}b)}$

5. Calcula

- $i^{2015} + i^{2000} + i^{1999} + i^{201} + i^{82} + i^{47}$
- $E_n = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^n$  para  $n \geq 1$
- $i^1 \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \dots \cdot i^{2015}$
- $i^{-5} + (-i)^{-7} + (-i)^{13} + i^{-100} + (-i)^{94}$

6. Responde cierto o falso. Si es cierto demuestra o justifica tu respuesta. Si es falso da un contraejemplo

- $re(iz) = -im(z)$
- $re(zw) = re(z) \cdot re(w)$
- $\|z - 1\| = \|\bar{z} - 1\|$
- Si  $z \neq 0$ , entonces  $Arg(z + \bar{z}) = 0$
- $arg(\bar{z}) = arg\left(\frac{1}{z}\right)$
- $im(iz) = re(z)$
- Si  $\bar{z} = -z$ , entonces  $z$  es un imaginario puro.

7. Prueba las siguientes propiedades

- Si  $z$  y  $w$  son dos números complejos se cumple que
  - $\|1 - \bar{z}w\|^2 - \|z - w\|^2 = (1 + \|zw\|)^2 - (\|z\| + \|w\|)^2$
  - $\|1 + \bar{z}w\|^2 - \|z + w\|^2 = (1 - \|z\|)^2 \cdot (1 - \|w\|)^2$
- Si  $z$  y  $w \in \mathbb{C}$  con  $\|z + w\| = \|z - w\|$  y  $w \neq 0$ , entonces  $\frac{iz}{w}$  es real.
- Si  $z$  y  $w \in \mathbb{C}$  que cumplan que  $(1 + \|w\|^2) \cdot z = (1 + \|z\|^2) \cdot w$ , entonces  $z = w$  o bien  $z\bar{w} = 1$

8. Muestra que para números complejos  $z, w$  y  $r$  son equivalentes

- a. Los puntos  $z, w$  y  $r$  son colineales
- b.  $\frac{r-z}{w-z} \in \mathbb{R}$
- c.  $r\bar{w} - r\bar{z} - z\bar{w} \in \mathbb{R}$
- d.  $\begin{vmatrix} 1 & z & \bar{z} \\ 1 & w & \bar{w} \\ 1 & r & \bar{r} \end{vmatrix} = 0$

Concluye que la ecuación de la recta que pasa por  $w$  y  $r$  es  $\operatorname{Im}\left(\frac{a-r}{a-w}\right) = 0$

- 9. ¿Qué podemos decir acerca del número complejo  $z$ , si  $(z)^2 = (\bar{z})^2$ ?
- 10. Para todo número complejo  $z \neq 0$ , muestra que  $z, -z, \frac{1}{z}, -\left(\frac{1}{z}\right)$  y  $0$  son colineales.
- 11. Si  $w \neq 1$ , es la raíz  $n$ -ésima de la unidad, muestra que
  - a.  $1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} = 0$
  - b.  $1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1} = \frac{-n}{1-w}$
- 12. Prueba la identidad trigonométrica de Lagrange

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Suponiendo que  $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$

- 13. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones
  - a.  $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$
  - b.  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
- 14. Un método para encontrar las raíces de la ecuación cúbica general  $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$ .
  - a. Muestra que la sustitución  $\omega = z + \frac{p}{3}$ . Reduce la ecuación cúbica general a una ecuación de la forma  $\omega^3 + a\omega + b = 0$
  - b. Verifica que las raíces de la ecuación anterior son
    - i.  $\omega = A + B$
    - ii.  $\omega = -\frac{A+B}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot(A-B)}{2}i$
    - iii.  $\omega = -\frac{A+B}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot(A-B)}{2}i$
 Donde  $A = \sqrt[3]{-\left(\frac{b}{2}\right) + D}$ ;  $B = \sqrt[3]{-\left(\frac{b}{2}\right) - D}$  y  $D = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$
  - c. Confirma la necesidad de los números complejos incluso para encontrar las raíces reales de  $\omega^3 - 19\omega + 30 = 0$
- 15. Encuentra el conjunto de todos los números  $z \in \mathbb{C}$ , que satisface
  - a.  $\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Im}(z)$
  - b.  $\|z - 1 + 3i\| = 4$
  - c.  $\|z - 1 + 3i\| < 4$
  - d.  $\|z - 1\| + \|z + i\| = 2$
  - e.  $\|z - 1 + i\| - \|z + 1 - i\| \geq 2$
  - f.  $\|z - i\| = \operatorname{Im}(z) + 1$
  - g.  $\|z - 1\| + \|z + 1\| = c$
  - h.  $\| \|z - 1\| - \|z + 1\| \| = c$