Tarea de Cálculo Diferencial e Integral I

“Imagen Directa, Imagen Inversa,

Gráfica de Funciones I,

Inducción Matemática”

1. Sea $f: X \to Y$, A y B subconjuntos del dominio
   a. Si $A, B \subset X$ y $A \subset B$, entonces es $f_*(A) \subset f_*(B)$
   b. Si $A, B \subset X$, entonces $f_*(A \cap B) \subset f_*(A) \cap f_*(B)$
   c. Si $A, B \subset X$, entonces $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$
2. Sea $f: X \to Y$, C y D subconjuntos del codominio
   a. Si $C, D \subset Y$ y $C \subset D$, entonces es $f^*(C) \subset f^*(D)$
   b. Si $C, D \subset Y$, entonces es $f^*(C \cup D) = f^*(C) \cup f^*(D)$
   c. Si $C, D \subset Y$, entonces es $f^*(C \cap D) = f^*(C) \cap f^*(D)$
   d. $f^*(C^C) = [f^*(C)]^C$
   e. $f^*(Y) = X$
   f. $f^*(\emptyset) = \emptyset$
3. Dada una función $f: A \to B$
   a. Demuestra que $f_*(X) - f_*(Y) \subset f_*(X - Y)$
   b. $f^*(f_*(X)) \supset X$, para todo $X \subset A$
   c. Para todo $Z \subset B$, se cumple $f_*\left(f^*(Z)\right) \subset Z$
4. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^2$
   a. Sea $A_1 = (0,1)$, $A_2 = [-1,1]$. Verifica por calculo directo que $f_*(A_1) \subset f_*(A_2)$
   b. Sea $B_1 = \{0\} \cup (1,4)$, $B_2 = [0,4]$. Verifica por calculo directo que $f^*(B_1) \subset f^*(B_2)$
   c. Sea $\Lambda = \{2,3,4,\dots\}$ y $A_\lambda = \left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\right)$. Verifica por calculo directo que $f_*(\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \cup_{\lambda\in\Lambda} f_*(A_\lambda)$

Recordatorio y notación sobre imagen directa, imagen inversa o preimagen

Sea $f: Dom(f) \to Y$, y sea X el conjunto de valores de f, entonces

$f_*(A) = \{f(x) \in Rang(f): x \in A \cap Dom(f)\} = \{f(x): x \in A\}$, para $A \subset X$ es llamada la imagen directa de A bajo f, también se puede utilizar la notación de $f(a)$

$f^*(B) = \{x \in Dom(f): f(x) \in B \cap Rang(f)\} = \{x: f(x) \in B\}$, para $B \subset Y$, es llamado la imagen inversa de B bajo f o la preimagen de B bajo f, también se usa la notación de $f^{-1}(B)$, pero podría causar confusión, ya que, se puede interpretar como la función inversa de f, f no necesariamente debe ser invertible, pero si existe f^*como el conjunto de valores que puede evaluarse en la función f.

d. Sea $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ y $B_\mu = (-\mu^2, \mu^2)$. Verifica por calculo directo que $f^*\left(\cup_{\mu\in\mathbb{R}} B_\mu\right) = \cup_{\mu\in\mathbb{R}} f^*(B_\mu)$ y $f^*\left(\cap_{\mu\in\mathbb{R}} B_\mu\right) = \cap_{\mu\in\mathbb{R}} f^*(B_\mu)$

5. Propón dos conjuntos X y Y, una parte $A \subset X$ y una función $f: X \to Y$ tales que

   a. $f_*(X - A) \subset Y - f_*(A)$

   b. $Y - f_*(A) \subset f_*(X - A)$

   c. $f(X - A) \cap [Y - f_*(A)] = \emptyset$

6. Dada una familia de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$, sea X un conjunto con las siguientes propiedades

   i. Para todo $\lambda \in L$, $A_\lambda \subset X$

   ii. Si $A_\lambda \subset Y$ para todo $\lambda \in L$, entonces $X \subset Y$.

   a. Demuestra que, en estas condiciones $X = \cup_{\lambda\in L} A_\lambda$
   b. Enunciar y demuestra un resultado análogo al inciso anterior, caracterizando $\cap_{\lambda\in L} A_\lambda$

7.

   a. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^2$. Sea $A_1 = (-1,1)$, $A_2 = [0,1)$, $A_3 = [-1,0]$. Encuentra $f_*(A_1)$, $f_*(A_2)$, $f_*(A_3)$

   b. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^2$. Sea $B_1 = (-1,0)$, $B_2 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ $B_3 = \{-1,0,1\}$. Encuentra $f^*(B_1)$, $f^*(B_2)$, $f^*(B_3)$

   c. Sea $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \frac{1}{|x|}$, sea $B = [-7,1)$. Encuentra $f^*(B)$.

   d. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$. Determina las preimágenes de los siguientes subconjuntos del codominio $A = [-1,1)$, $B = (-\infty, \frac{1}{2}]$, $C = [0,3]$, $D = [0,3)$, $E = [1,10]$

8. Sea $f: Pot(A) \to Pot(A)$, una función tal que $X \subset Y$, entonces $f_*(Y) \subset f_*(X)$ y $f_*\left(f_*(X)\right) = X$. Prueba que $f(\cup X_\lambda) = \cup f(X_\lambda)$ y $f(\cup X_\lambda) = \cup f(X_\lambda)$. (Aquí X, Y y todos los X_λ son subconjuntos de A).

9. Determina el dominio de las siguientes funciones

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$	$f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x}}$	$f(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{2}{x-1}}}$	$f(x) = \dfrac{x}{x - \dfrac{1}{x}}$
$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$	$f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 5}$	$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$	$v(t) = \sqrt{\cos t}$

10. Grafica las funciones utilizando transformaciones (traslaciones o rotaciones)

$y(x) = (x-2)^2$	$y(x) = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2$	$f(x) = x^2+2$	$f(z) = \|z+4\|$	$f(x) = \|x\|-3$
$f(x) = \frac{1}{x}-4$	$y(x) = \frac{1}{x+4}$	$f(x) = -\sqrt{x-1}$	$f(x) = -(x-1)^2$	$y(x) = -\|x-1\|$
$f(x) = \|-x-1\|$	$y(x) = 3(x-2)^2 + 1$	$h(t) = -5\|t\|$	$y(t) = \frac{1}{x+3}+2$	$d(s) = 2-\frac{1}{s-3}$
$h(t) = \cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$	$e(x) = \frac{1}{\cos x+\pi}$	$g(t) = \left\|\cos\left(t-\frac{3}{2}\pi\right)\right\|$	$w(a) = \|\cos t\| - \frac{3}{2}\pi$	$c(\alpha) = \|sen\ (2\alpha) - 3\|$

11. Gráfica la función dada, marca el vértice, las intersecciones con el eje x y el eje y

    a. $y(x) = -2x^2+20x-54$

    b. $y(x) = x^2+4x+4$

    c. $y(x) = 3x^2-12x+18$

    d. $y(x) = 4-2x^2$

12.

    a. Grafica la función $h(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{2x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$ Esta función se le llama la Función Escalón de Heaviside.

    b. Sea a un número real y sea $H(x)$ la función de escalón de Heaviside. Definimos $h_a(x) = H(x-a)$. Grafica esta función. La gráfica es una traslación de la gráfica de $H(x)$, considera los casos de $a > 0$ y $a < 0$.

    c. Grafica la función $u(x) = H(-x)$. Sea $b \in \mathbb{R}$ y sea $u_b(x)$ la función definida como $u_b(x) = U(x-b)$ Grafica esta función considerando los casos $b > 0$ y $b < 0$.

13. Justifica o da un contraejemplo de las siguientes afirmaciones

    a. La suma de dos funciones pares es par

    b. La diferencia de dos funciones pares es par

    c. La suma de dos funciones impares es impar

    d. La diferencia de dos funciones impares es impar

    e. El producto de dos funciones pares es par

    f. El producto de dos funciones impares es impar

14. Encuentra una ecuación que describa a $(f \circ g)(x)$ y establece el dominio

    a. $f(x) = \sqrt{x-1};\quad g(x) = 5 - x$

    b. $f(x) = \frac{1}{x+4},\quad g(x) = \cos x$

    c. $f(x) = \cos x \quad g(x) = \frac{1}{x+4}$

    d. $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad g(x) = x^2 + 5$

    e. $f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \sqrt{x}$

15. Inducción

    a. Demuestra que para toda $n \geq 0$ $\sum_{k=0}^{n} 9 \cdot 10^k = 10^{k+1} - 1$

    b. Demuestra que para todo natural $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k)! = (n+1)! - 1$

    c. Después de trascurrir n meses en un experimento de invernadero, el número de plantas de un tipo particular satisface las ecuaciones:

    $$p_0 = 3$$

    $$p_1 = 7$$

    $$p_{n+2} = 3p_{n+1} - 2p_n \; con \; n \in \mathbb{N}$$

    Demuestra que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 2^{n+2} - 1$.

    d. Demuestra que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el número $2^{2n} - 1$ es múltiplo de 3.

    e. Demuestra que $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 3n = \frac{3}{2}\big(n(n+1)\big)$

    f. Demuestra que $2(5) + 3(6) + 4(7) + \cdots + (n+1)(n+4) = \frac{n}{3}(n+4)(n+5)$

    g. Demuestra que $1(2) + 2(3) + 3(4) + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

    h. Demuestra que $1(3) + 2(4) + 3(5) + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$