Capítulo

"Límites"

Introducción

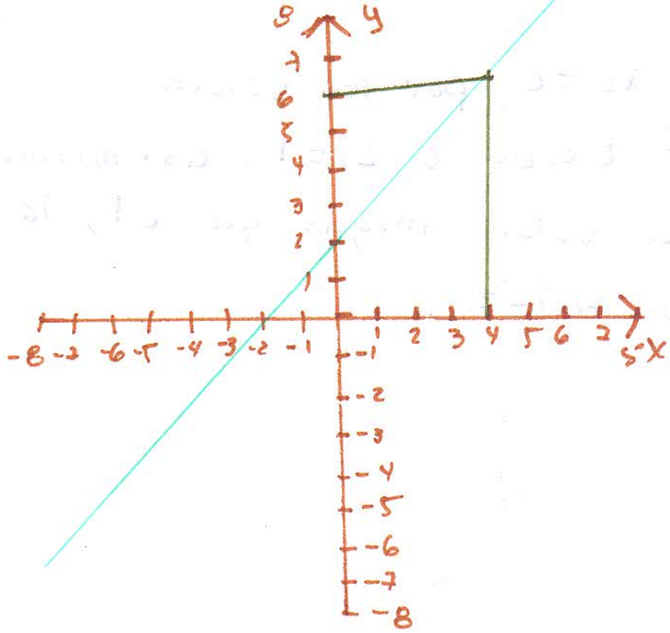
El concepto de límite es el más importante en el cálculo pero también el más difícil.

Si tenemos una función real de variable real definida en un entorno reducido de x_0. (Es decir, para todo $r>0$ se cumple $|x-x_0|<r$, ó $x \in (x_0-r, x_0+r)$. Donde nos va a interesar estudiar qué ocurre con los valores de dicha función a medida que x se acerca a x_0, pero sin importar el valor que toma en el punto x_0.

Veamos los siguientes ejemplos.

Sea $f(x) = x+2$.

Tenemos que el dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$



Tomemos valores cercanos a $x_0 = 4$ y construyamos una tabla de valores de $x=4$

$x<4$		$x>4$	
x	f(x)	x	f(x)
3	5	5	7
3.5	5.5	4.5	6.5
3.9	5.9	4.1	6.1
3.99	5.99	4.01	6.01
3.999	5.999	4.001	6.001

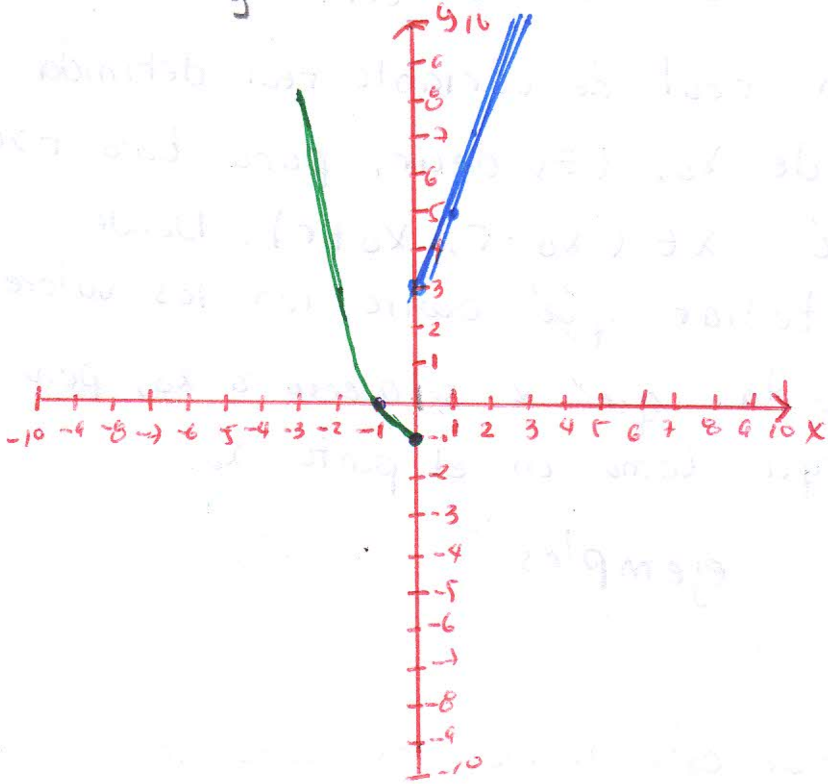
Aquí vemos que cuando x se acerca a $x_0=4$ ya sea con valores menores o mayores que x_0 la función se acerca al número real $L=6$ el cual en este caso coincide con el valor de la función en $x_0=4$
$(L=f(x_0)=f(4)=6)$

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \leq 0 \\ 2x+3 & x > 0 \end{cases}$$

Tenemos que el dominio de esta funcion es todo $\mathbb{R}$

La gráfica es



Construyamos una tabla con el fin de determinar los valores que toma la funcion a medida que x se acerca a $x_0 = 0$ sin ser igual a cero

$x < 0$		$x > 0$	
x	f(x)	x	f(x)
−2	3	2	7
−1	0	1	5
−0.5	−0.75	0.1	3.2
−0.1	−0.99	0.01	3.02
−0.01	−0.9999	0.001	3.002
−0.001	−0.999999		

Aquí si nos acercamos a $x_0 = 0$ por los valores menores que el la funcion f tiende a $L_1 = 1$; asimismo si nos acercamos a $x_0 = 0$ por valores mayores que él, la funcion f tiende $L_2 = 3$, siendo $L_1 \neq L_2$.

Podemos decir

En el primer ejemplo. Tenemos que $f(x)$ se acerca a L cuando x se acerca a x_0, siendo $x \neq x_0$. A este valor lo llamaremos el límite de la función cuando x tiende a x_0.

En el último caso $f(x)$ tiende a valores distintos segun nos acercamos a x_0 por los valores mayores o menores que él. En este caso diremos que la funcion f no tiene límite en ese punto

En esta parte como último demos una definición "imprecisa" de límite.

Si L sea límite significa que es un numero al cual podemos aproximar los valores $f(x)$ "tanto como queramos"

Una manera de medir la proximidad de $f(x)$ y L es mediante "el valor absoluto de su diferencia $|f(x)-L|$, que geométricamente representa la distancia entre los punts en la recta real corresponde a los numeros reales $f(x)$ y L respectivamente.

A este número $|f(x)-L|$ también lo hemos llamado distancia entre los numeros reals $f(x)$ y L, así que el límite será un número L tal que la distancia $|f(x)-L|$ entre $f(x)$ y ese número L, podemos hacerla tan pequeña como queremos con tal que elijamos un x suficientemente cerca de x_0. Con lo cual establecemos la definición precisa de Límite