Primera propiedad o proposicion de Límites

Proposición

Unicidad de Límites

Sean f una función, los numeros reales a, L_1 y L_2 tales que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$

entonces $L_1 = L_2$

Prueba

Para probar esta igualdad, primero mostraremos que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $|L_1 - L_2| < \varepsilon$. Esto solo será posible si $|L_1 - L_2| = 0$, es decir, si $L_1 = L_2$. Sea pues $\varepsilon > 0$ arbitraria

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ para la ε dada,

existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } 0 < |x-a| < \delta_1$$

También $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ para la ε dada,

existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } 0 < |x-a| < \delta_2$$

Si tomamos la menor de las dos deltas

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces las dos desigualdades

se cumpliran al mismo tiempo

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo x que cumple $0 < |x-a| < \delta$, pues esta última desigualdad garantiza las dos desigualdades

$$0 < |x-a| < \delta_1 \quad y \quad 0 < |x-a| < \delta_2$$

Por tanto si $0 < |x-a| < \delta$ se tiene que

$$|L_1 - L_2| = |L_1 + 0 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2|$$

$$\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| = |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto hemos probado $|L_1 - L_2| < \varepsilon$

por lo consiguiente $L_1 = L_2$