

7/ -

La pregunta que nos podemos hacer es si tenemos el valor de $\epsilon > 0$ ¿cómo se puede encontrar el valor de δ ?

Con el fin de aplicar la definición para demostrar que L es el límite deseado, debemos demostrar que dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Siempre que $x \in \text{Dom } f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$

Lo que se requiere es demostrar como se escogerá δ para un $\epsilon > 0$ dado cualquiera. Es decir debemos dar una regla para la selección de δ en términos de ϵ

Una forma de hacer esto es la siguiente

1.- Sacar a $|x - x_0|$ como un factor de $|f(x) - L|$

$$|f(x) - L| = |g(x)| \cdot |x - x_0|$$

2.- Ahora, si es posible encontrar un número positivo $\eta > 0$ tal que siempre que $0 < |x - x_0| < \eta$

3.- La función $g(x)$ quede acotada digamos que $|g(x)| \leq M$ entonces

$$|f(x) - L| = |g(x)| \cdot |x - x_0| \leq M |x - x_0|$$

Siempre que $0 < |x - x_0| < \eta$. Por otra parte

$$M |x - x_0| < \epsilon$$

Siempre que $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{M}$. De donde si $\delta = \min\{\eta, \frac{\epsilon}{M}\}$

las dos anteriores desigualdades se verifican y

$$|f(x) - L| = |g(x)| |x - x_0| \leq M |x - x_0| < \epsilon$$

Siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$