Ejemplo

Halla $\lim_{x \to 3} (2x^2 - 3x + 1)$

Solución

Tenemos que $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; entonces

$f(3) = 2(3)^2 - 3(3) + 1 = 2(9) - 9 + 1 = 18 - 8 = 10$

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x-3| < \delta$ entonces

$$|2x^2 - 3x + 1 - 10| = |2x^2 - 3x - 9| < \varepsilon$$

18

$$|2x^2 - 3x - 9| = \left| \frac{(2x-6)}{2}(2x+3) \right|$$

$$= |(2x+3)(x-3)| = |2x+3| \cdot |x-3|$$

Si elegimos a $\delta = 1$

$|x-3| < 1$ ó $-1 < x-3 < 1$ ó

$-1 + 3 < x - 3 - 3 < 1 + 3$ (sumo a todos los miembros 3)

$2 < x < 4$ multiplico por 2

$4 < 2x < 8$ sumo 3 a todos los miembros

$4 + 3 < 2x + 3 < 8 + 3$

$7 < 2x + 3 < 11$ entonces

$0 < 2x + 3 < 11$ ó

$|2x + 3| < 11$

Tenemos

$$|2x+3||x-3| < 11|x-3|$$

$$11|x-3| < \varepsilon$$

Siempre que $|x-3| < \frac{\varepsilon}{11}$

De donde si $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{11}\}$ entonces

$$|2x^2-3x+1-10| = |2x^2-3x-9| = |2x+3||x-3|$$

$$\leq 11|x-3| < \varepsilon$$

Siempre que $0 < |x-3| < \delta$

→ La eleccion de $\eta = 1$ fue una eleccion adecuada pero no ciertamente necesaria

Si hubieramos elegido $\eta = 2$

$|x-3| < 2$ ó $-2 < x-3 < 2$ ó

$-2+3 < x-3+3 < 2+3$ ó $1 < x < 5$ ó

(multiplico por 2)

$2 < 2x < 10$ sumo 3

$2+3 < 2x+3 < 10+3$

$0 < 5 < 2x+3 < 13$

$|2x+3| < 13$

$|2x+3||x-3|$

$\leq 13|x-3| < \varepsilon$

$13|x-3| < \varepsilon$

$\boxed{|x-3| < \frac{\varepsilon}{13}}$

Tenemos que $\delta = \min\{2, \frac{\varepsilon}{13}\}$