Ejemplo 2

Usando la definicion, probemos el siguiente límite $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $|x-3| < \delta$ entonces

$|x^2 - 9| < \varepsilon$

Como $\varepsilon > 0$ Tenemos

$|x^2 - 9| = |(x+3) \cdot (x-3)| < \varepsilon$

$|(x+3)| \cdot |x-3| < \varepsilon$ podemos hacer esto

$|x-3| < \dfrac{\varepsilon}{x+3}$ pero esto depende de ε y de x con lo cual no puede ser, recordemos que δ depende solo de ε.

Entonces proponemos que $\delta = 1$ y veamos que sucede

$|x-3| < 1$

$-1 < x-3 < 1$ ó $-1+3 < x-3+3 < 1+3$ (sumo 3 a todos los miembros)

ó

$2 < x < 4$ (sumo 3 a todos los lados)

$2+3 < x+3 < 4+3$ ó $5 < x+3 < 7$ entonces

$0 < 5 < x+3 < 7$ ó $0 < |x+3| < 7$

9|___

Regresando

$$|x^2-9| = |(x+3)\cdot(x-3)| = |x+3|\cdot|x-3|$$

$$< 7\delta < \varepsilon$$

es decir $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{7}$

Tenemos que $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$.