

Ejemplo

Demuestra el siguiente límite usando la definición

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Sea $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x-2| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2-x}{2x} \right| = \frac{|2-x|}{|2x|} = \frac{|x-2|}{|2x|} < \epsilon$$

Si proponemos si $\delta = 1$

$$|x-2| < 1 \quad \text{ó} \quad -1 < x-2 < 1 \quad \text{ó}$$

$$-1 + 2 < x-2+2 < 1+2 \quad \text{Sumo 2 en todos los miembros}$$

$$1 < x < 3 \quad \text{multiplico por 2}$$
$$2 < 2x < 6$$

Con lo cual tenemos

$$0 < 2 < 2x < 6 \quad \text{ó}$$

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{2x} < \frac{1}{2}$$

Regresando

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2-x}{2x} \right| < \frac{|2-x|}{2} = \frac{|x-2|}{2} < \epsilon$$

$$|2-x| < 2\epsilon$$

entonces $\delta = \min \{1, 2\epsilon\}$